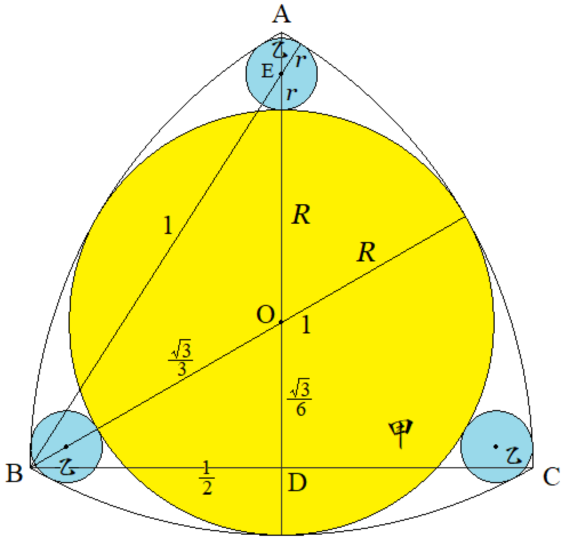
● 問題 418 追加問題１　解答＜三角定規＞

右図のように各点を定める。



甲円の半径を R, 乙円の半径を r とすると，図より

$$\frac{\sqrt{3}}{3}+R=1 \quad \therefore\ R=1-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{3-\sqrt{3}}{3}$$

△ BDE は直角三角形だから

$$(1-r)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{6}+1-\frac{\sqrt{3}}{3}+r\right)^2$$

これを展開して整理することにより

$$r=\frac{11\sqrt{3}-9}{141}$$

以上より，　**甲円:** $\boldsymbol{\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}}$　(≒0.422…)

乙円: $\boldsymbol{\dfrac{11\sqrt{3}-9}{141}}$　(≒0.071…)

追加問題２

(1)　$[x]^2-3x+2<0$　…(*)

(ⅰ) $x<0$ のとき，$[x]^2>0$, $-3x+2>0$ であるから，$[x]^2-3x+2>0$

よって，この範囲で不等式(*)は解をもたない。　…①

(ⅱ) $0\leqq x<1$ のとき，$[x]=0$, $[x]^2=0$ であるから，

不等式(*)は　$-3x+2<0 \quad \therefore\ \frac{2}{3}<x<1$　…②

(ⅲ) $1\leqq x<2$ のとき，$[x]=1$, $[x]^2=1$ であるから

不等式(*)は　$1-3x+2=-3x+3<0 \quad \therefore\ 1<x<2$　…③

(ⅳ) $2\leqq x<3$ のとき，$[x]=2$, $[x]^2=4$ であるから

不等式(*)は　$4-3x+2=-3x+6<0 \quad \therefore\ 2<x<3$　…④

(ⅴ) $3\leqq x<4$ のとき，$[x]=3$, $[x]^2=9$ であるから，

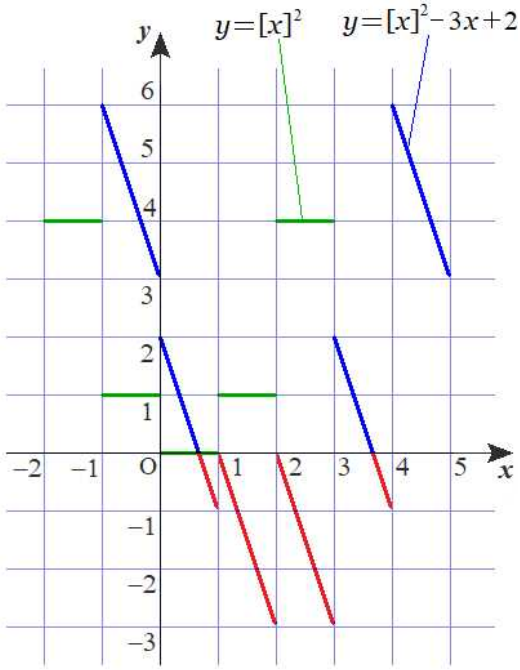
不等式(*)は　$9-3x+2<0 \quad \therefore\ \frac{11}{3}<x<4$　…⑤

(ⅵ) $5\leqq n$ で $n\leqq x<n+1$ のとき，$[x]=n$, $[x]^2=n^2$

不等式(*)は　$n^2-3x+2<0 \quad \therefore\ x>\frac{n^2+2}{3}$

であるが，$\frac{n^2+2}{3}-(n+1)=\frac{n^2-3n-1}{3}\geqq\frac{25-15-1}{3}>0$

で $n+1<\frac{n^2+2}{3}$ であるから，この範囲で不等式(*)は解をもたない。…⑥



以上①～⑥より求める(*)の解は

$\boldsymbol{\dfrac{2}{3}<x<3,\ \dfrac{11}{3}<x<4}$, **ただし $\boldsymbol{x=1,\ 2}$ を除く。**…[答]

(2)　$[x^2]-3x+2<0$　…(**)

(ⅶ) $x<0$ のとき，$[x^2]>0$, $-3x+2>0$ であるから，$[x^2]-3x+2>0$

よって，この範囲で不等式(**)は解をもたない。　…⑦

(ⅷ) $0 \leqq x<1$ のとき，$[x^2]=0$ であるから，

不等式(**)は　$-3x+2<0$　$\therefore\ \dfrac{2}{3}<x<1$　…⑧

(ⅸ) $1 \leqq x<\sqrt{2}$ のとき，$1 \leqq x^2<2$, $[x^2]=1$ であるから

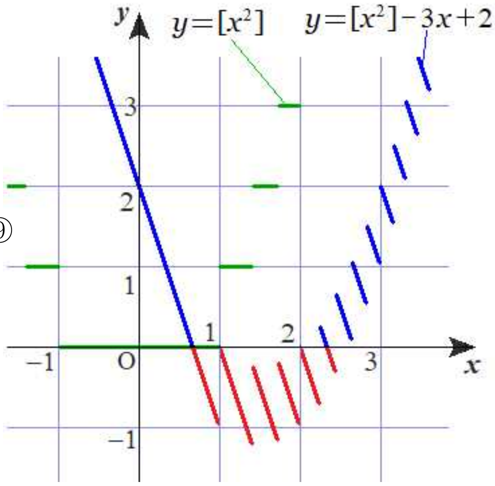
不等式(**)は　$1-3x+2=-3x+3<0$　$\therefore\ 1<x<\sqrt{2}$　…⑨

(ⅹ) $\sqrt{2} \leqq x<\sqrt{3}$ のとき，$2 \leqq x^2<3$, $[x^2]=2$ であるから，

不等式(**)は $4-3x<0$ $\therefore\ \dfrac{4}{3}<x$　$\therefore \sqrt{2} \leqq x<\sqrt{3}$　…⑩

(xi) $\sqrt{3} \leqq x<2$ のとき，$3 \leqq x^2<4$, $[x^2]=3$ であるから，

不等式(**)は $5-3x<0$ $\therefore\ \dfrac{5}{3}<x$　$\therefore \sqrt{3} \leqq x<2$　…⑪



(xii) $2 \leqq x<\sqrt{5}$ のとき，$4 \leqq x^2<5$, $[x^2]=4$ であるから，

不等式(**)は $6-3x<0$ $\therefore\ 2<x$　$\therefore\ 2<x<\sqrt{5}$　…⑫

(xiii) $\sqrt{5} \leqq x<\sqrt{6}$ のとき，$5 \leqq x^2<6$, $[x^2]=5$ であるから，

不等式(**)は $7-3x<0$ $\therefore\ \dfrac{7}{3}<x$　$\therefore\ \dfrac{7}{3} \leqq x<\sqrt{6}$　…⑬

(xiv) $6 \leqq n$ で $\sqrt{n} \leqq x<\sqrt{n+1}$ のとき，$n \leqq x^2<n+1$, $[x^2]=n$

不等式(**)は　$n-3x+2<0$　$\therefore\ x>\dfrac{n+2}{3}$

であるが，$\left(\dfrac{n+2}{3}\right)^2-(n+1)=\dfrac{n^2-5n-5}{9} \geqq \dfrac{6^2-5\cdot 6-5}{9}>0$

で $\sqrt{n+1}<\dfrac{n+2}{3}$ であるから，この範囲で不等式(**)は解をもたない。…⑭

以上⑦～⑭より求める(*)の解は

$\mathbf{\dfrac{2}{3}<x<\sqrt{5},\ \dfrac{7}{3}<x<\sqrt{6}}$**，ただし** $\boldsymbol{x=1,\ 2}$ **を除く。**…[答]