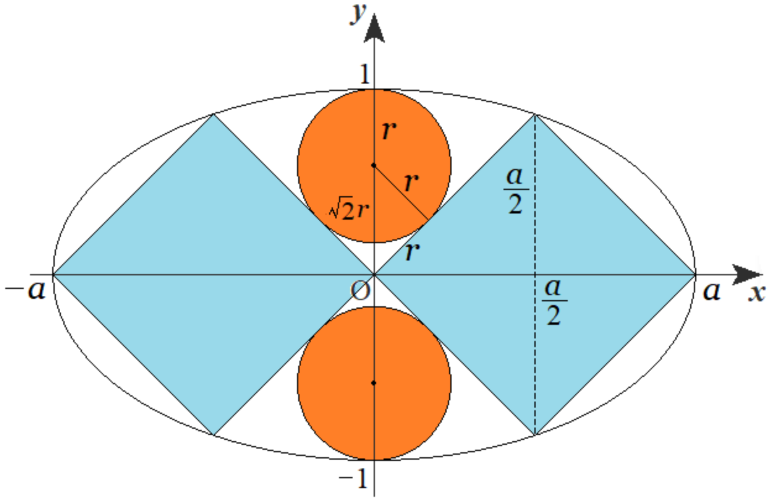
● 問題 418 解答＜三角定規＞

[第25問題]



楕円の方程式を $\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1$ …①

とする。正方形が図のように内接する

とき，点 $\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{a}{2}\right)$ が楕円①上にあるから

$$\frac{a^2/4}{a^2}+\frac{a^2}{4}=1 \quad \therefore\ a=\sqrt{3} \quad \cdots ②$$

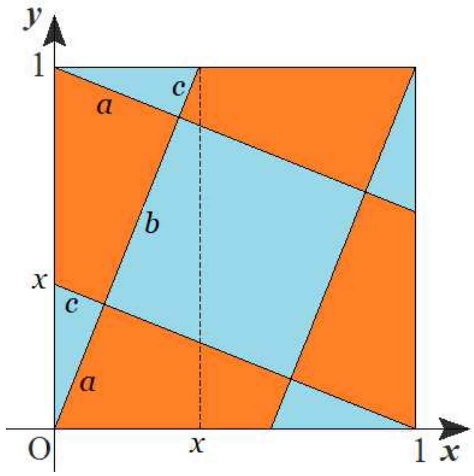
円の半径を r とすると，図より

$$r+\sqrt{2}\,r=1 \quad \therefore\ r=\sqrt{2}-1 \quad \cdots ③$$

正方形の 1 辺は $\dfrac{a}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ だから，

$$\frac{\textbf{赤径}}{\textbf{一辺}}=\frac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{6}/2}=\frac{2\sqrt{6}(\sqrt{2}-1)}{3}=\frac{\sqrt{48}-\sqrt{24}}{3} \quad \cdots[答]$$

[第26問題]



正方形の 1 辺を 1 とし，右図のように x, a, b, c を定めると，
図中の直角三角形の相似から

$$a=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}},\ b=\frac{1-x}{\sqrt{x^2+1}},\ c=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} \quad (ただし，0\leqq x\leqq 1)$$

このとき，赤色部分の面積 S は

$$S=4\cdot\frac{1}{2}(a+c)b$$

$$=2\cdot\frac{x+x^2}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{1-x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{2(x-x^3)}{x^2+1}=2\left(-x+\frac{2x}{x^2+1}\right)$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{dS}{dx}=-1-\frac{2x^2-2}{(x^2+1)^2}=-\frac{x^4+4x^2-1}{(x^2+1)^2}$$

$\dfrac{dS}{dx}=0$ を解いて，$x^2=\sqrt{5}-2$

$x^2<\sqrt{5}-2$ のとき $\dfrac{dS}{dx}>0$, $x^2>\sqrt{5}-2$ のとき $\dfrac{dS}{dx}<0$ だから

S は $x^2=\sqrt{5}-2$, $x=\sqrt{\sqrt{5}-2}$ のとき最大値をとる。

このとき $S=\dfrac{2x(1-x^2)}{x^2+1}=\dfrac{2\sqrt{\sqrt{5}-2}\cdot(3-\sqrt{5})}{\sqrt{5}-1}=\sqrt{10\sqrt{5}-22}$

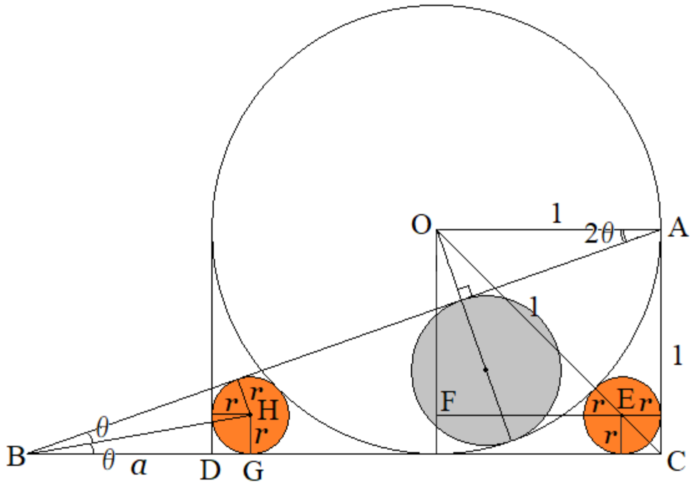
以上より，**赤面積**$=\sqrt{\sqrt{\mathbf{500}}-\mathbf{22}}$ **(正方形の面積)** …[答]

[第27問題]

右図のように各点を定める。

円 O の半径を 1,円 E,H の半径を r とする。

さらに, $\mathrm{BD}=a$, $\angle \mathrm{HBG}=\theta$ とする。



直角三角形 OEF の 2 辺より

$$1+r=\sqrt{2}\,(1-r)$$

$$\therefore\ r=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=3-2\sqrt{2}\quad\cdots①$$

次に，直角三角形 BGH について

$$\tan\theta=\frac{\mathrm{GH}}{\mathrm{BH}}=\frac{r}{a+r}\quad\cdots②$$

直角三角形 ABC について，$\tan 2\theta=\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}=\dfrac{1}{a+2}\quad\cdots③$

tan の倍角公式に②③を入れて

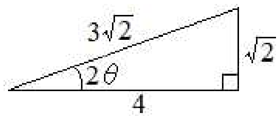
$$\frac{2r/(a+r)}{1-r^2/(a+r)^2}=\frac{1}{a+2}$$

これを a の 2 次方程式として整理すると　$(1-2r)a^2-2r(1+r)a-4r^2=0\quad\cdots④$

$a=3-2\sqrt{2}$ (①) を代入し更に整理して，　$7a^2-4(5\sqrt{2}-6)a-4(8\sqrt{2}-11)=0\quad\cdots⑤$

$a>0$ でこれを解いて，　$a=2\sqrt{2}-2\quad\cdots⑥$

⑥を③に戻し，　$\tan 2\theta=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$



このとき　$\sin 2\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=\dfrac{1}{3}\quad\cdots⑦$

図より，黒円の直径は　$1-\sin 2\theta=\dfrac{2}{3}$

以上より，　**黒円径$=\dfrac{2}{3}$(鈎)**　…[答]