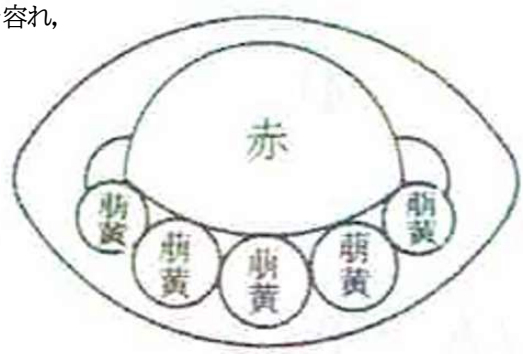
第 420 回

第 31 問題

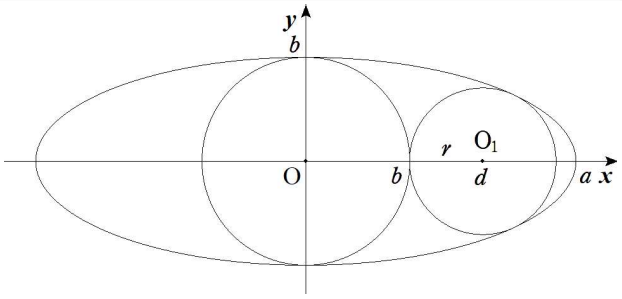
回転楕円（楕円を短軸のまわりに一回転してできる楕円体）に赤球を容れ，
その間に萌黄球を連ねて容れる（楕円体と2箇所で接するように）。
楕円の長径と短径を知って萌黄球の個数を求めよ。



術文（答）

萌黄球の数＝$\left[10\cdot\dfrac{\text{長径}}{\text{短径}}+4.3\right]$，［ ］はガウスの記号。

解答　赤球の半径 b，萌黄球の一つを $O_1(r)$ 半径 r とする。
図のように座標軸を設定する。



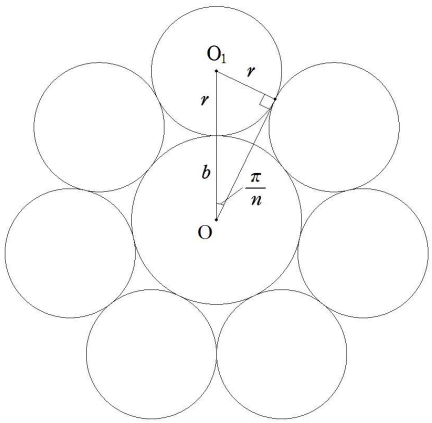
楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ と萌黄円 $(x-d)^2+y^2=r^2$ は接する。

楕円と萌黄円の中心間の距離を d とすると，

$$d=\frac{\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-r^2)}}{b}=b+r$$

これを r について解くと，$r=\dfrac{b(a^2-2b^2)}{a^2}$　…①，$d=b+r=b+\dfrac{b(a^2-2b^2)}{a^2}=\dfrac{2b(a^2-b^2)}{a^2}$

赤球の周りの萌黄球が n 個連なっているとすると，



$$\sin\frac{\pi}{n}=\frac{r}{b+r}=\frac{r}{d}=\frac{\dfrac{b(a^2-2b^2)}{a^2}}{\dfrac{2b(a^2-b^2)}{a^2}}=\frac{a^2-2b^2}{2(a^2-b^2)}=\frac{1-2t^2}{2(1-t^2)}\quad\cdots②$$

ただし，$0<t=\dfrac{b}{a}<1$

これを定理（＊3）に代入すると，$n=\left[\dfrac{\pi}{\sin\dfrac{\pi}{n}}\right]=\left[\dfrac{1-t^2}{1-2t^2}\cdot 2\pi\right]$

$t=0$ のとき，②より，$n=6$ なので $n>6$　…③

n の最大は，$r=\dfrac{b^2}{a}$（曲率円）のときであるから，①より，$\dfrac{b(a^2-2b^2)}{a^2}=\dfrac{b^2}{a}$　$a=2b$ より，$t=\dfrac{1}{2}$

これを②に代入すると，$n=\left[\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}{1-2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}\cdot 2\pi\right]=[3\pi]=9$　$\therefore n\leqq 9$　…④

③，④より，題意に適する個数は，$n=7,\ 8,\ 9$（個）である。

[1]　$n=7$ のとき，②より，$t\fallingdotseq 0.342$　$[10t+a]=7$ より，$3.58<a<4.58$

[2]　$n=8$ のとき，②より，$t\fallingdotseq 0.436$　$[10t+a]=8$ より，$3.64<a<4.64$

[3]　$n=9$ のとき，②より，$t\fallingdotseq 0.489998$　$[10t+a]=9$ より，$4.10002<a<5.10002$

これらの 3 式を満たす a の値の範囲は，$4.10020<a<4.58$

a の値を小数第 1 位までとすると，$a=4.2$，4.3，4.4，4.5 の 4 つの値が，萌黄球の数＝$\left[10\cdot\dfrac{\text{短径}}{\text{長径}}+a\right]$ を満たす。

この算額では，$a=4.3$ を選んでいる。　答

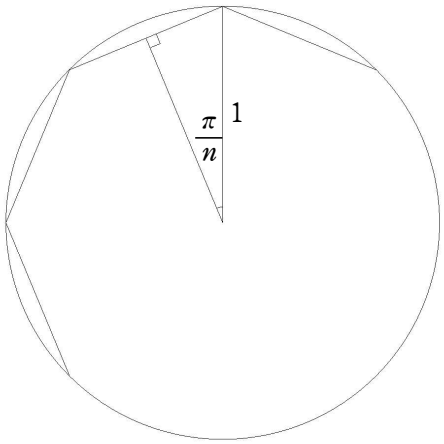
注意　術文（答）は，印刷ミスである。（分母，分子の長径と短径が逆）

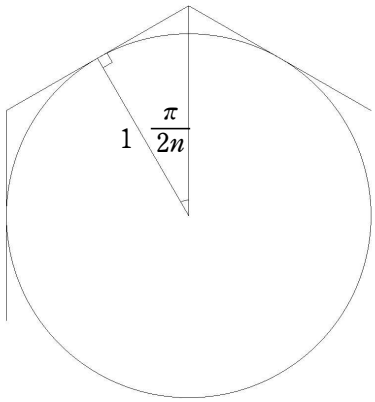
（＊3）

定理　自然数 $n \geqq 3$ について次式が成立する。

$$\left[\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}\right]=n \quad (n \geqq 3) \qquad [\ ]\text{はガウス記号}$$

証明　$n \leqq \dfrac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}} < n+1$ を示す。





半径１の円に正 n 角形を内接させると，$2\pi > n\cdot 2\sin\dfrac{\pi}{n}$　　$\therefore\ n < \dfrac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}$　　…①

半径１の円に正 $2n$ 角形を外接させると，$2\pi < 2n\cdot 2\tan\dfrac{\pi}{2n}$

故に，$2n\cdot 2\tan\dfrac{\pi}{2n} \leqq 2(n+1)\sin\dfrac{\pi}{n}$ を示せば十分である。

$\dfrac{1}{n}=x$ とおけば，$x \leqq \dfrac{1}{3}$ で $\dfrac{1}{1+x} \leqq \cos^2\dfrac{\pi}{2}x = \dfrac{1+\cos\pi x}{2}$ を示せばよい。$\left(0 < x \leqq \dfrac{1}{3}\right)$

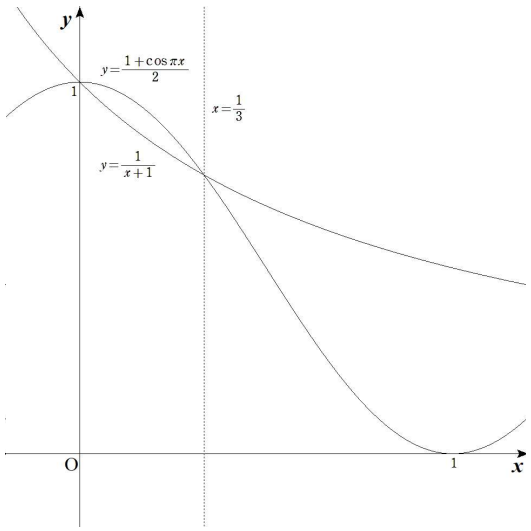
両辺のグラフはよく知られている。

右図より．$0<x\leqq\frac{1}{3}$ のとき，$\frac{1}{x+1}\leqq\frac{1+\cos\pi x}{2}$

よって，$\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}<n+1$　…②

①，②より，$n\leqq\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}<n+1$

よって，$\left[\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}\right]=n$　（$n\geqq3$）　終



参考　$\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}$ の近似値（$n=3,\ 4,\ \cdots,\ 100$）

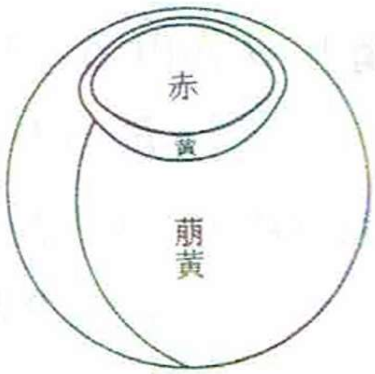
```
In[1]:= Table[N[π/Sin[π/n]], {n, 3, 100}]
```

```
Out[1]= {3.6276, 4.44288, 5.3448, 6.28319, 7.24063, 8.20938, 9.1854, 10.1664,
11.151, 12.1382, 13.1274, 14.1182, 15.1102, 16.1033, 17.0971,
18.0917, 19.0869, 20.0825, 21.0785, 22.0749, 23.0717, 24.0687,
25.0659, 26.0634, 27.061, 28.0588, 29.0568, 30.0549, 31.0531, 32.0515,
33.0499, 34.0484, 35.047, 36.0457, 37.0445, 38.0433, 39.0422, 40.0412,
41.0401, 42.0392, 43.0383, 44.0374, 45.0366, 46.0358, 47.035, 48.0343,
49.0336, 50.0329, 51.0323, 52.0316, 53.031, 54.0305, 55.0299, 56.0294,
57.0289, 58.0284, 59.0279, 60.0274, 61.027, 62.0265, 63.0261, 64.0257,
65.0253, 66.0249, 67.0246, 68.0242, 69.0238, 70.0235, 71.0232,
72.0229, 73.0225, 74.0222, 75.0219, 76.0216, 77.0214, 78.0211,
79.0208, 80.0206, 81.0203, 82.0201, 83.0198, 84.0196, 85.0194,
86.0191, 87.0189, 88.0187, 89.0185, 90.0183, 91.0181, 92.0179,
93.0177, 94.0175, 95.0173, 96.0171, 97.017, 98.0168, 99.0166, 100.016}
```

（ジョーカー）

第 32 問題

球から楕円を穿去する。球径と楕円の長径を知って
穿出された残りの体積の最大となるものを求めよ。



術文（答）

注　題意に不明な点があり未解決。