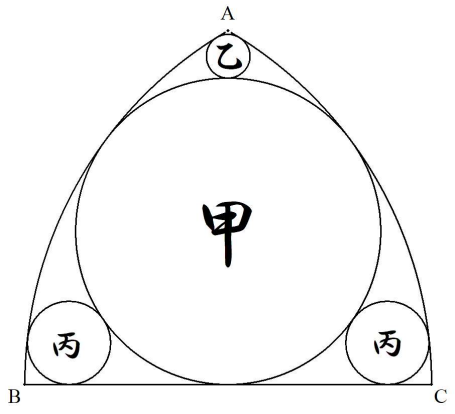
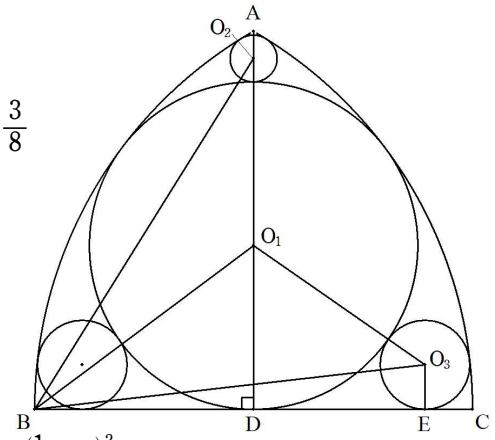
第420回追加問題

A，B，Cは1辺の長さが1の正三角形の頂点で，
弧AB，弧ACは半径1の円弧である。
この図形の中に図のように互いに接する甲乙丙円
を配置する。
甲乙丙円の半径をそれぞれ求めよ。



解答　甲乙丙円を $O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$，$O_3(r_3)$ とおき，
図のように記号を付ける。



△O_1BD に三平方の定理を適用すると，$\left(\frac{1}{2}\right)^2+{r_1}^2=(1-r_1)^2$　$\therefore r_1=\frac{3}{8}$

△O_2BD に三平方の定理を適用すると，$\left(\frac{1}{2}\right)^2+(2r_1+r_2)^2=(1-r_2)^2$

$r_1=\frac{3}{8}$ を代入して計算すると，$r_2=\frac{3}{56}$

次に，$O_3B=1-r_3$，$BE=BD+DE=\frac{1}{2}+2\sqrt{r_1r_3}$，$O_3E=r_3$

であるから△O_3BE に三平方の定理を適用すると，$\left(\frac{1}{2}+2\sqrt{r_1r_3}\right)^2+{r_3}^2=(1-r_3)^2$

$r_1=\frac{3}{8}$ を代入して整理すると，$14r_3+2\sqrt{6}\sqrt{r_3}-3=0$　$\therefore \sqrt{r_3}=\frac{-\sqrt{6}\pm4\sqrt{3}}{14}$

$\sqrt{r_3}>0$ より，$\sqrt{r_3}=\frac{-\sqrt{6}+4\sqrt{3}}{14}$　$\therefore r_3=\frac{3(9-4\sqrt{2})}{98}$　（≒0.1023412）

よって，各円の半径は，甲：$\frac{3}{8}$，乙：$\frac{3}{56}$，丙：$\frac{3(9-4\sqrt{2})}{98}$　答

次の式を簡単にせよ。

$\sqrt{5+\sqrt{2023\cdot2025\cdot2027\cdot2029+16}}$

解答　$2023=a$ とおくと，

与式$=\sqrt{5+\sqrt{a(a+2)(a+4)(a+6)+16}}=\sqrt{5+\sqrt{(a^2+6a)(a^2+6a+8)+16}}$

$=\sqrt{5+\sqrt{(a^2+6a)(a^2+6a+8)+16}}=\sqrt{5+\sqrt{(a^2+6a+4-4)(a^2+6a+4+4)+16}}$

$=\sqrt{5+\sqrt{(a^2+6a+4)^2-4^2+16}}=\sqrt{5+(a^2+6a+4)}=\sqrt{(a+3)^2}=a+3=2026$　答

補足　$\sqrt{a(a+d)(a+2d)(a+3d)+d^4}=\sqrt{(a^2+3ad)(a^2+3ad+2d^2)+d^4}$

$=\sqrt{(a^2+3ad+d^2)^2-(d^2)^2+d^4}=a^2+3ad+d^2$

次の方程式を解け。

$$\frac{x+\sqrt{7}}{\sqrt{2023}+1}+\frac{x+2\sqrt{7}}{\sqrt{2023}+2}+\frac{x+3\sqrt{7}}{\sqrt{2023}+3}+\cdots+\frac{x+2023\sqrt{7}}{\sqrt{2023}+2023}=2023\sqrt{7}$$

解答　変形すると，

$$\left(\frac{x+\sqrt{7}}{\sqrt{2023}+1}-\sqrt{7}\right)+\left(\frac{x+2\sqrt{7}}{\sqrt{2023}+2}-\sqrt{7}\right)+\left(\frac{x+3\sqrt{7}}{\sqrt{2023}+3}-\sqrt{7}\right)+\cdots+\left(\frac{x+2023\sqrt{7}}{\sqrt{2023}+2023}-\sqrt{7}\right)=0$$

$\sqrt{2023}=17\sqrt{7}$ より，

$$\frac{x-119}{\sqrt{2023}+1}+\frac{x-119}{\sqrt{2023}+2}+\frac{x-119}{\sqrt{2023}+3}+\cdots+\frac{x-119}{\sqrt{2023}+2023}=0$$

$$(x-119)\left(\frac{1}{\sqrt{2023}+1}+\frac{1}{\sqrt{2023}+2}+\frac{1}{\sqrt{2023}+3}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2023}+2023}\right)=0$$

$\therefore x=119$　答

(2022/11/13　ジョーカー)