● 問題 420 解答＜三角定規＞

［第31問題］

赤球，萌黄球の中心を通る鉛直断面で考える。(図 1)

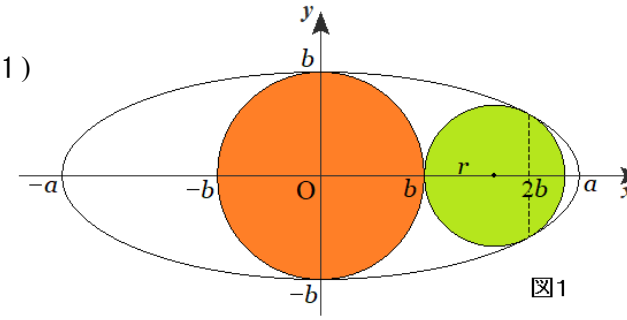


図1

楕円の両半軸を a, b, 萌黄円の半径を r とすると，

楕円： $\dfrac{b^2}{a^2}x^2+y^2=b^2$ …①

萌黄円： $(x-b-r)^2+y^2=r^2$ …②

①－② を展開して整理すると

$$\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)x^2-2(b+r)x+2b(b+r)=0 \quad \cdots③$$

①と ②が 2 点で接する ⇔ ③の判別式＝0 だから

$$\frac{D}{4}=(b+r)^2-\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\cdot 2b(b+r)=(b+r)\left\{b+r-2b\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\right\}=0$$

$$\therefore\ b+r=\frac{2b(a^2-b^2)}{a^2} \qquad \therefore\ r=\frac{a^2b-2b^3}{a^2} \quad \cdots④$$

④を③に戻して整理すると

$$(a^2-b^2)(x-2b)^2=0$$

となるから，楕円①と萌黄球②の接点の x 座標は $x=2b$。よって， $a>2b$ …⑤

次に，赤球，萌黄球の中心を通る鉛直断面を見る。(図 2)

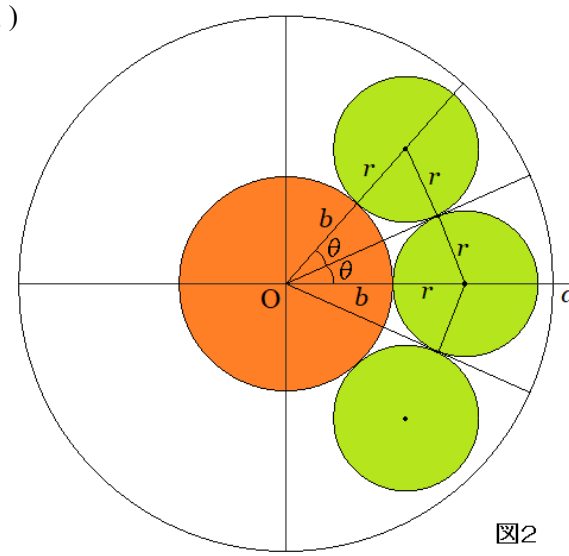


図2

赤球の中心から萌黄球の半径 r を見込む角 θ は

$$\sin\theta=\frac{r}{b+r}=\frac{a^2-2b^2}{2(a^2-b^2)}=\frac{1}{2}-\frac{b^2}{2(a^2-b^2)} \quad \cdots⑥$$

⑤⑥より $\dfrac{1}{3}<\sin\theta<\dfrac{1}{2}$ $\therefore$ $19.4°<\theta<30°$ …⑦

萌黄球の数は $\dfrac{180°}{\theta}$ で， $\dfrac{180°}{19.4°}\fallingdotseq 9.2$， $\dfrac{180°}{30°}=6$ より

6, 7, 8, 9 個。その境界は

$\dfrac{1-2b^2/a^2}{2(1-b^2/a^2)}=\sin\dfrac{\pi}{k}$ $(k=7,\ 8,\ 9)$ を b/a について解いて

$b/a\fallingdotseq 0.34$ $(k=7)$, 0.44 $(k=8)$, 0.49 $(k=9)$

以上より，求める萌黄球の数は

(1) $b/a<0.34$ のとき **6** 個

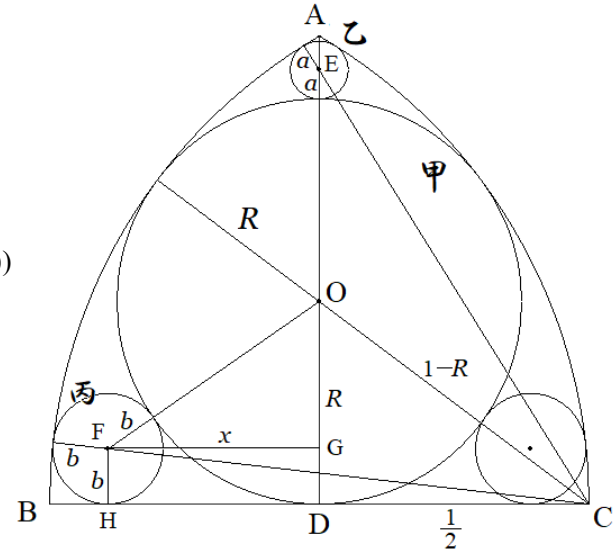
(2) $0.34<b/a<0.44$ のとき **7** 個

(3) $0.44<b/a<0.49$ のとき **8** 個

(4) $0.99<b/a<0.5$ のとき **9** 個 …［答］

※ 術文のような評価式には到達できませんでした。

［追加問題１］



右図のように各点を定める。甲円の半径を R とすると，△ OCD は直角三角形だから

$$(1-R)^2=R^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \therefore\ R=\frac{3}{8} \quad \cdots①$$

乙円の半径 a は，△ ECD は直角三角形だから

$$(1-a)^2=(a+2R)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(a+\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad (\because ①)$$

これを整理して解いて，$a=\dfrac{3}{56}$ …②

丙円の半径を b とし，FG ＝ x とする。△ OFG は直角三角形だから

$$(R+b)^2=(R-b)^2+x^2 \quad \therefore\ x^2=4Rb=\frac{3b}{2} \quad \cdots③$$

また，△CFH が直角三角形だから　$(1-b)^2=\left(\dfrac{1}{2}+x\right)^2+b^2$

$$\therefore\ 1-2b=\frac{1}{4}+x+x^2=\frac{1}{4}+x+\frac{3b}{2} \quad (\because ③) \qquad \therefore\ x=\frac{3-14b}{4} \quad \cdots④$$

③④より，$\left(\dfrac{3-14b}{4}\right)^2=\dfrac{3b}{2}$　$\therefore\ 4\cdot 49b^2-2\cdot 54b+9=0$ …⑤

⑤を解いて　$b=\dfrac{27\pm 12\sqrt{2}}{98}$。複号の＋は不適。

以上より，求める 3 円の半径は

甲円＝$\mathbf{\dfrac{3}{8}}$，乙円＝$\mathbf{\dfrac{3}{56}}$，丙円＝$\mathbf{\dfrac{27-12\sqrt{2}}{98}}$　…[答]

［追加問題２］

1　$N=\sqrt{5+\sqrt{2023\cdot2025\cdot2027\cdot2029+16}}$

$2023\cdot2025\cdot2027\cdot2029+16$

$=(2026-3)(2026-1)(2026+1)(2026+3)+16$

$=(2026^2-1)(2026^2-9)+16$

$=2026^4-10\cdot2026^2+25$

$=(2026^2-5)^2$

$\therefore\ N=\sqrt{5+2026^2-5}=\mathbf{2026}$　…[答]

2　$\displaystyle\sum_{i=1}^{2023}\frac{x+\sqrt{7}\,i}{\sqrt{2023}+i}=2023\sqrt{7}$　…①

$x=\sqrt{7}\,u$ と置くと，①は　$\displaystyle\sum_{i=1}^{2023}\frac{\sqrt{7}\,(u+i)}{\sqrt{2023}+i}=2023\sqrt{7}$　…②

②は $u=\sqrt{2023}=17\sqrt{7}$ を解にもち，②は 1 次方程式だから，これが唯一の解である。

よって①の解は，$x=\sqrt{7}\cdot17\sqrt{7}=\mathbf{119}$　…[答]