第 421 回

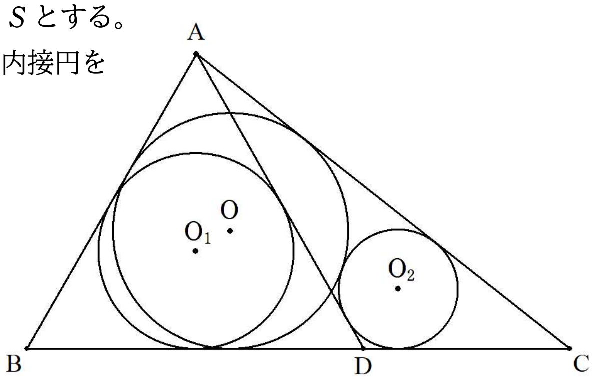
1．三角形内に 1 つの頂点から斜線を引き 2 個の円を内接させる。この場合をまず考える。

公式

BC＝ a ，CA＝ b ，AB＝ c である△ABC の面積を S とする。
BC 上に点 D をとり，△ABC，△ABD，△ADC の内接円を
それぞれ $O(r)$ ，$O_1(r_1)$ ，$O_2(r_2)$ とする。
このとき，次が成り立つ。

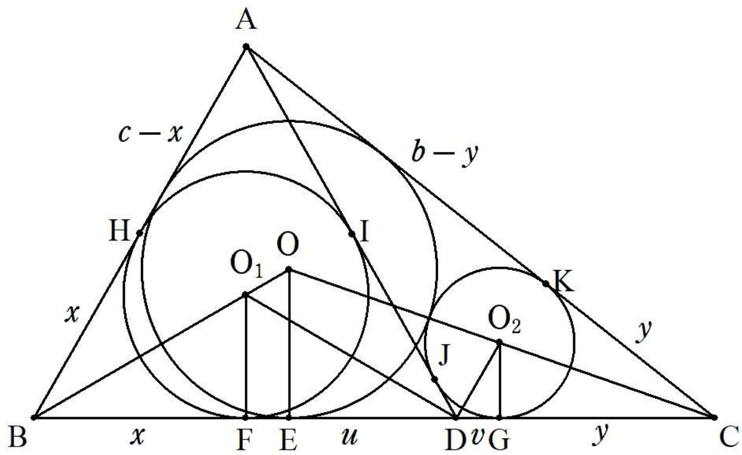
(1)　$S=\dfrac{ar_1r_2}{r_1+r_2-r}$

(2)　AD＝ $b\cdot\dfrac{r_1}{r}+c\cdot\dfrac{r_2}{r}-a\cdot\dfrac{r_1}{r}\cdot\dfrac{r_2}{r}$



公式の証明

(1)　O，O_1，O_2 から BC に下した
垂線の足をそれぞれ E，F，G，また，
O_1，O_2 の接点を H，I，J，K とする。
BF＝BH＝ x ，CG＝CK＝ y ，
FD＝ID＝ u ，DG＝DJ＝ v とおく。
また，$s=\dfrac{a+b+c}{2}$ とおくと，
BE＝ $s-b$ ，EC＝ $s-c$ である。
△O_1BF∽△OBE より，$\dfrac{r_1}{x}=\dfrac{r}{s-b}$



$\therefore\ x=\dfrac{r_1}{r}(s-b)=\dfrac{r_1s}{S}(s-b)$　…①

同様に，△O_2CG∽△OCE より，$y=\dfrac{r_2}{r}(s-c)=\dfrac{r_2s}{S}(s-c)$　…②

AH＝AI＝ $c-x$ ，AK＝AJ＝ $b-y$ であるから，
AD＝AI＋ID＝ $c-x+u$　…③
AD＝AJ＋JD＝ $b-y+v$　…④
③，④より，$c-x+u=b-y+v$　$\therefore\ u-v=b-c+x-y$　…⑤
また，BC＝ $x+u+v+y=a$ より，$u+v=a-x-y$　…⑥
⑤，⑥を連立させて，$u=s-c-y$ ，$v=s-b-x$　…⑦

これらに②，①を代入すると，$u=(s-c)\left(1-\dfrac{r_2s}{S}\right)$，$v=(s-b)\left(1-\dfrac{r_1s}{S}\right)$　…⑦′

△O_1FD∽△DGO_2 より，$\dfrac{u}{r_1}=\dfrac{r_2}{v}$　$\therefore\ uv=r_1r_2$

これに⑦′を代入すると，$(s-c)\left(1-\dfrac{r_2s}{S}\right)\cdot(s-b)\left(1-\dfrac{r_1s}{S}\right)=r_1r_2$

$(s-c)(s-b)=\dfrac{S^2}{s(s-a)}$ であるから，$\dfrac{S^2}{s(s-a)}\left\{1-\dfrac{s(r_1+r_2)}{S}+\dfrac{s^2r_1r_2}{S^2}\right\}=r_1r_2$

分母を払って展開すると，$S^2-s(r_1+r_2)S+s^2r_1r_2=s(s-a)r_1r_2$

$S=rs$ であるから，第 1 項を $S^2=rsS$ に書き換えると，$rsS-s(r_1+r_2)S+asr_1r_2=0$

両辺を s で割り，S について解くと，$S=\dfrac{ar_1r_2}{r_1+r_2-r}$ 終

(2) ③，⑦より，AD$=c-x+u=c-x+(s-c-y)=s-x-y$

これに，①，②を代入すると，

AD$=s-\dfrac{r_1}{r}(s-b)-\dfrac{r_2}{r}(s-c)=\dfrac{br_1}{r}+\dfrac{cr_2}{r}-\dfrac{s(r_1+r_2-r)}{r}=\dfrac{br_1+cr_2}{r}-\dfrac{S(r_1+r_2-r)}{r^2}$

(1)より，$S(r_1+r_2-r)=ar_1r_2$ であるから，

AD$=\dfrac{br_1+cr_2}{r}-\dfrac{ar_1r_2}{r^2}=b\cdot\dfrac{r_1}{r}+c\cdot\dfrac{r_2}{r}-a\cdot\dfrac{r_1}{r}\cdot\dfrac{r_2}{r}$ 終

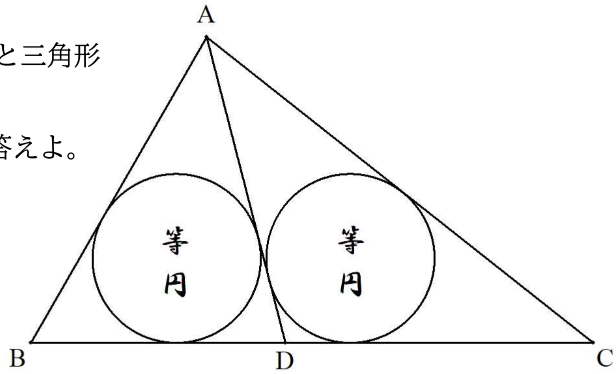
２．第 421 回

三角形 ABC の辺 BC 上に点 D を，三角形 ABD と三角形 ADC の内接円の半径が等しくなるようにとる。

BC$=a$，CA$=b$，AB$=c$ のとき，次の問いに答えよ。

問 1　線分 AD の長さを求めよ。

問 2　三角形 ABD の内接円の直径を求めよ。



問 2　公式 (1)で $r_2=r_1$ とおくと，$S=\dfrac{ar_1{}^2}{2r_1-r}$ より，$ar_1{}^2-2Sr_1+Sr=0$

$$r_1=\frac{S\pm\sqrt{S^2-aSr}}{a}=\frac{S}{a}\left(1\pm\sqrt{1-\frac{ar}{S}}\right)=\frac{S}{a}\left(1\pm\sqrt{\frac{s-a}{s}}\right)$$

$S=\dfrac{1}{2}ah$（h は三角形の高さ）とおくと，$\dfrac{S}{a}=\dfrac{h}{2}>r_1$ であるから，

$r_1=\dfrac{S}{a}\left(1-\sqrt{\dfrac{s-a}{s}}\right)$ …⑧　よって，$2r_1=\dfrac{2S}{a}\left(1-\sqrt{\dfrac{s-a}{s}}\right)$

$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ を代入すると，$2r_1=\dfrac{2\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}\,(\sqrt{s}-\sqrt{s-a})}{a}$ 答

補足　三角形の高さを h とすると，$\left(1-\dfrac{2r_1}{h}\right)\left(1-\dfrac{2r_2}{h}\right)=1-\dfrac{2r}{h}$

証明　$S=\dfrac{1}{2}ah$ であるから，公式 (1) より，$\dfrac{ar_1r_2}{r_1+r_2-r}=\dfrac{1}{2}ah$

両辺に $\dfrac{4(r_1+r_2-r)}{a}$ を掛けると，$4r_1r_2=2h(r_1+r_2-r)$

変形すると，$(h-2r_1)(h-2r_2)=h^2-2hr$

両辺を h^2 で割ると，結果が得られる。 終

問1　公式(1)で，$r_1=r_2$ のとき，$S=\dfrac{ar_1{}^2}{2r_1-r}=rs$ とおき，分母を払うと，$ar_1{}^2-2rsr_1+r^2s=0$

両辺を r^2 で割り移項すると，$a\left(\dfrac{r_1}{r}\right)^2=2s\left(\dfrac{r_1}{r}\right)-s$　…⑨

公式(2)で，$r_1=r_2$ のとき，

$$\mathrm{AD}=(b+c)\cdot\frac{r_1}{r}-a\left(\frac{r_1}{r}\right)^2=(b+c)\cdot\frac{r_1}{r}-\left(2s\cdot\frac{r_1}{r}-s\right)\quad(\because ⑨)$$

$$=s-\frac{a}{r}\cdot r_1=s-\frac{a}{r}\cdot\frac{S}{a}\left(1-\sqrt{\frac{s-a}{s}}\right)\quad(\because ⑧)$$

$$=s-\frac{a}{r}\cdot\frac{rs}{a}\left(1-\sqrt{\frac{s-a}{s}}\right)=\sqrt{s(s-a)}$$ 答

３．第421回

別解　△ABD，△ADCの内接円をそれぞれ$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$とおき，

BD＝ ka （$0<k<1$），AD＝ d，△ABC＝ S とおく。

$$r_1=\frac{\triangle ABD}{\frac{1}{2}(AB+BD+DA)}=\frac{2kS}{c+ka+d},\quad r_2=\frac{\triangle ADC}{\frac{1}{2}(AD+DC+CA)}=\frac{2(1-k)S}{d+(1-k)a+b}$$ より，

$r_1=r_2$ とおくと，$\dfrac{2kS}{c+ka+d}=\dfrac{2(1-k)S}{d+(1-k)a+b}$　$\therefore (2k-1)d=c-bk-ck$

[1]　$k\fallingdotseq\dfrac{1}{2}$ のとき，$d=\dfrac{c-bk-ck}{2k-1}$　…①

△ABDに余弦定理を適用すると，

$$d^2=c^2+(ka)^2-2c(ka)\cos B=c^2+(ka)^2-2c(ka)\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=a^2k^2-(c^2+a^2-b^2)k+c^2$$

これに①を代入すると，$\left(\dfrac{c-bk-ck}{2k-1}\right)^2=a^2k^2-(c^2+a^2-b^2)k+c^2$

分母を払って整理すると，

$$k(k-1)\{4a^2k^2-4(c^2+a^2-b^2)k+a^2-b^2-2bc+3c^2\}=0$$

$0<k<1$ より，$k=\dfrac{c^2+a^2-b^2\pm(b-c)\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)}}{2a^2}$

$s=\dfrac{a+b+c}{2}$ とおくと，$k=\dfrac{c^2+a^2-b^2\pm2(b-c)\sqrt{s(s-a)}}{2a^2}$　…②

これを複号のまま①に代入すると，

$$d=\frac{c-bk-ck}{2k-1}=-\frac{b-c}{2(2k-1)}-\frac{b+c}{2}=-\frac{b-c}{2\left\{2\cdot\frac{c^2+a^2-b^2\pm2(b-c)\sqrt{s(s-a)}}{2a^2}-1\right\}}-\frac{b+c}{2}$$

$$=-\frac{b-c}{2}\cdot\frac{a^2}{c^2-b^2\pm2(b-c)\sqrt{s(s-a)}}-\frac{b+c}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{b+c\mp2\sqrt{s(s-a)}}-\frac{b+c}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2\{b+c\pm2\sqrt{s(s-a)}\}}{(b+c)^2-4s(s-a)}-\frac{b+c}{2}=\frac{b+c\pm2\sqrt{s(s-a)}}{2}-\frac{b+c}{2}=\pm\sqrt{s(s-a)}$$ （複号同順）

$d>0$ であるから，$\therefore d=\sqrt{s(s-a)}$　…③

②で複号は＋の方が題意に適することが分かる。$\therefore\ k=\dfrac{c^2+a^2-b^2+2(b-c)\sqrt{s(s-a)}}{2a^2}$ …②′

②′，③，$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ を $r_1=\dfrac{2kS}{c+ka+d}$ に代入すると，

$$r_1=\frac{2\cdot\dfrac{c^2+a^2-b^2+2(b-c)\sqrt{s(s-a)}}{2a^2}\cdot\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{c+\dfrac{c^2+a^2-b^2+2(b-c)\sqrt{s(s-a)}}{2a^2}\cdot a+\sqrt{s(s-a)}}$$

$$=\frac{\{c^2+a^2-b^2+2(b-c)\sqrt{s(s-a)}\}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}{2a\{(s-b)\sqrt{s}+(s-c)\sqrt{s-a}\}}$$

$$=\frac{\{(s-b)\sqrt{s}-(s-c)\sqrt{s-a}\}\{c^2+a^2-b^2+2(b-c)\sqrt{s(s-a)}\}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}{2a\{(s-b)^2s-(s-c)^2(s-a)\}}$$

$$=\frac{\left\{\dfrac{a(a^2-b^2-2bc+3c^2)}{2}\sqrt{s}-\dfrac{a(a^2-b^2-2bc+3c^2)}{2}\sqrt{s-a}\right\}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}{2a\cdot\dfrac{a(a^2-b^2-2bc+3c^2)}{4}}$$

$$=\frac{(\sqrt{s}-\sqrt{s-a})\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}{a}$$

よって，等円の直径は，$2r_1=\dfrac{2\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}(\sqrt{s}-\sqrt{s-a})}{a}$

[2]　$k=\dfrac{1}{2}$ のとき，$b=c$ となり，△ABD，△ACD は合同な直角三角形となる。

$$\mathrm{AD}=\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{(2b+a)(2b-a)}}{2}$$

$$r_1=\frac{BD+DA-AB}{2}=\frac{\dfrac{a}{2}+\dfrac{\sqrt{(2b+a)(2b-a)}}{2}-b}{2}=\frac{\sqrt{2b-a}(\sqrt{2b+a}-\sqrt{2b-a})}{4}$$

$$\therefore\ 2r_1=\frac{\sqrt{2b-a}(\sqrt{2b+a}-\sqrt{2b-a})}{2}$$

これらは [1] の結果で $b=c$ とおいたものになっている。

以上，[1]，[2] より，

$\mathrm{AD}=\sqrt{s(s-a)}$，等円の直径$=\dfrac{2\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}(\sqrt{s}-\sqrt{s-a})}{a}$　答

(2022/12/11　ジョーカー)