2023に因んだ問題

1 ある自然数を13，23，29，31で割ると余りはそれぞれ8，22，22，8であった。
このような自然数の中で最小のものを求めよ。

解答　ある自然数をNとおくと，k，lを整数として，$N-8=13\cdot 31k$　…①，$N-22=23\cdot 29l$　…②である。

①−②より，$14=403k-667l$　$\therefore k=\dfrac{667l+14}{403}=2l+\dfrac{-139l+14}{403}$

$\dfrac{-139l+14}{403}=t_1$（整数）とおくと，$l=\dfrac{-403t_1+14}{139}=-3t_1+\dfrac{14(t_1+1)}{139}$

$\dfrac{t_1+1}{139}=t$（整数）とおくと，$t_1=139t-1$

$l=-3(139t-1)+14t=-403t+3$

$k=2(-403t+3)+(139t-1)=-667t+5$

①より，$N-8=403(-667t+5)$　$N=-403\cdot 667t+2023>0$より，$t<\dfrac{2023}{403\cdot 667}<1$

よって，最小となるNは，$t=0$のときで，2023である。答

2 2023を2つの自然数に分け，それぞれに1を加えて2つの自然数の平方数にする。2023の分け方の1例を示せ。

解答

$2023=x+y$とおく。

仮定から，a，bを自然数として，$x+1=a^2$，$y+1=b^2$とおける。

この2式を辺々加えると，$x+y+2=a^2+b^2$　$\therefore a^2+b^2=2025=45^2$　…①

$3^2+4^2=5^2$の両辺に9^2を掛けると，$27^2+36^2=45^2$　…②

①，②より，$a^2=27^2$，$b^2=36^2$とおくと，$x=a^2-1=728$，$y=b^2-1=1295$

よって，728と1295　答

3 $x^2-2023y^2=1$を満たす整数解を1組求めよ。

解答　$x=45$，$y=1$のとき，$x^2-2023y^2=45^2-2023\cdot 1^2=2$であるから，

プラマグプタの恒等式$(x_1{}^2-Ny_1{}^2)(x_2{}^2-Ny_2{}^2)=(x_1x_2+Ny_1y_2)^2-N(x_1y_2+x_2y_1)^2$（$*$）に，

$N=2023$，$x_1=x_2=45$，$y_1=y_2=1$を代入すると，$2^2=(45^2+2023\cdot 1^2)^2-2023(45\cdot 1+45\cdot 1)^2$

両辺を2^2で割ると，$1=2024^2-2023\cdot 45^2$

よって，$x^2-2023y^2=1$を満たす整数解の1組は，$(x,\ y)=(2024,\ 45)$　答

（$*$）

左辺$=(x_1+\sqrt{N}y_1)(x_1-\sqrt{N}y_1)(x_2+\sqrt{N}y_2)(x_2-\sqrt{N}y_2)$

括弧の1番目と3番目，2番目と4番目を掛けると，

左辺$=\{(x_1x_2+Ny_1y_2)+\sqrt{N}(x_1y_2+x_2y_1)\}\{(x_1x_2+Ny_1y_2)-\sqrt{N}(x_1y_2+x_2y_1)\}$

$\quad=(x_1x_2+Ny_1y_2)^2-N(x_1y_2+x_2y_1)^2=$右辺　■

$\boxed{4}$ ある有理数の平方に $\dfrac{1}{2023}$ を加えるとその答えが有理数の平方になるという。

ある有理数を 1 つ求めよ。

解答　ある有理数を x とおく。

$x^2+\dfrac{1}{2023}=(x-a)^2$ とおくと，　$x=\dfrac{2023a^2-1}{4046a}$

例えば，$a=1$ とおくと，　$x=\dfrac{1011}{2023}$　答

$a=\dfrac{1}{17}$ とおくと，　$x=\dfrac{3}{119}$

$\boxed{5}$ $1^{2023}+2^{2023}+3^{2023}+\cdots+2023^{2023}$ を 23 で割ったときの余りを求めよ。

解答　与式$=\displaystyle\sum_{k=1}^{2023}k^{2023}=\sum_{k=1}^{1011}\left\{k^{2023}+(2024-k)^{2023}\right\}+1012^{2023}$

$2024=2^3\cdot 11\cdot 23$ であるから，$k^{2023}+(2024-k)^{2023}\equiv k^{2023}+(-k)^{2023}\equiv 0\ (mod\ 23)$

$1012=2^2\cdot 11\cdot 23$ であるから，$1012^{2023}\equiv 0\ (mod\ 23)$

よって，$1^{2023}+2^{2023}+3^{2023}+\cdots+2023^{2023}\equiv 0\ (mod\ 23)$ となるから，与式を 23 で割ったときの余りは，0　答

(2022/12/11　ジョーカー)