● 問題 421 追加問題 解答＜三角定規＞

1 題意より, 求める数 N は a, b を整数として

$N=13\cdot31a+8 \quad \cdots(1.1)$

$N=23\cdot29b+22 \quad \cdots(1.2)$

上 2 式より　$13\cdot31a-23\cdot29b=14 \quad \cdots(1.3)$

これを解いて，$a=23\cdot29n+5,\ b=13\cdot31n+3\ \ (n:\text{整数}) \quad \cdots(1.4)$

(1.4)を元に戻して $N=13\cdot31(23\cdot29n+5)+8=13\cdot23\cdot29\cdot31n+2023$

N の最小値は $n=0$ のときで $N=\mathbf{2023}$　$\cdots$[答]

2　$m+n=2023 \quad \cdots(2.1)$

題意より　$m+1=p^2,\ n+1=q^2$ と置くと，$m=p^2-1,\ n=q^2-1 \quad \cdots(2.2)$

(2.1) より　$p^2+q^2-2=2023 \quad \therefore\ p^2+q^2=2025=45^2=9^2\cdot5^2 \quad \cdots(2.3)$

$3^2+4^2=5^2$ および (2.3) より $p=9\cdot3=27,\ q=9\cdot4=36$ とできて，

(2.2) に戻して，$m=27^2-1=\mathbf{728},\ n=36^2-1=\mathbf{1295}$　$\cdots$[答]

3　$x^2-2023y^2=1 \quad \cdots(3.1)$

変形して　$x^2-1=(x-1)(x+1)=2023y^2 \quad \cdots(3.2)$

$x=2024$ とすると(3.2)は　$2024^2-1=2023\cdot2025=2023\cdot45^2$　となるから

$x=\mathbf{2024},\ y=\mathbf{45}$ は(3.2)を満たす。　$\cdots$[答]

ペル方程式の参考サイト（https://wkmath.org/pell-f.html 等）によれば

$(2024+45\sqrt{2023})^2$ を展開して得られる $x=8{,}193{,}151$, $y=182{,}160$ も解となるようです。

4　計算を容易にするため　$\left(\dfrac{m}{2023}\right)^2+\dfrac{1}{2023}=\left(\dfrac{n}{2023}\right)^2 \quad \cdots(4.1)$　の形のものを探す。

分母を払って整理すると　$(n+m)(n-m)=2023=7\cdot17^2 \quad \cdots(4.2)$

(4.2) の解は，(A) $(n+m,\ n-m)=(7\cdot17^2,\ 1)$ より $(n,\ m)=(1012,\ 1011)$

(B) $(n+m,\ n-m)=(17^2,\ 7)$ より $(n,\ m)=(148,\ 141)$

(C) $(n+m,\ n-m)=(7\cdot17,\ 17)$ より $(n,\ m)=(68,\ 51)$

これらを (4,1) に戻し約分した形で書くと

$$\left(\frac{1011}{2023}\right)^2+\frac{1}{2023}=\left(\frac{1012}{2023}\right)^2,\quad \left(\frac{141}{2023}\right)^2+\frac{1}{2023}=\left(\frac{148}{2023}\right)^2,\quad \left(\frac{3}{289}\right)^2+\frac{1}{2023}=\left(\frac{4}{289}\right)^2$$

以上より,「ある有理数」の例は

$\mathbf{\dfrac{3}{289}},\ \mathbf{\dfrac{141}{2023}},\ \mathbf{\dfrac{1011}{2023}}$ など　$\cdots$[答]

5

WolframAlpha によれば　$\mathrm{mod}\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{2023} n^{2023},\ 23\right)=\mathbf{0}$　となるようですが，ちょっと手が出ません。