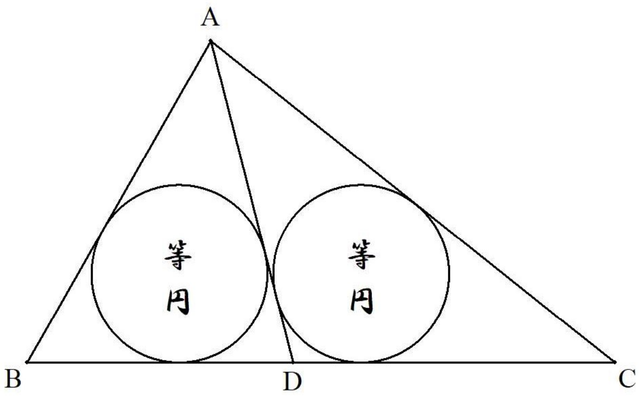
第421回

三角形ABCの辺BC上に点Dを，三角形ABDと三角形ADCの内接円の半径が等しくなるようにとる。
BC＝a，CA＝b，AB＝cのとき，次の問いに答えよ。
問1　線分ADの長さを求めよ。



別解2　AD＝x，BD＝y，CD＝zとおき，等円の半径をr'とすれば，

$r'=\dfrac{\triangle ABD}{\frac{c+x+y}{2}}=\dfrac{\triangle ACD}{\frac{b+x+z}{2}}$ より，$\dfrac{\triangle ABD}{\triangle ACD}=\dfrac{c+x+y}{b+x+z}=\dfrac{y}{z}$　$\therefore \dfrac{y}{z}=\dfrac{c+x}{b+x}$

$y+z=a$ であるから，$c+x=p$，$b+x=q$とおくと，$y=\dfrac{pa}{p+q}$，$z=\dfrac{qa}{p+q}$　…①

△ABCにおいて，Stewartの定理により，$zc^2+yb^2=a(x^2+yz)$ (*)

これに①を代入すると，$qc^2+pb^2=(p+q)x^2+\dfrac{pqa^2}{p+q}$　$\therefore p(b^2-x^2)+q(c^2-x^2)=\dfrac{pqa^2}{p+q}$

ここでp，qを元に戻すと，$(c+x)(b^2-x^2)+(b+x)(c^2-x^2)=\dfrac{(c+x)(b+x)a^2}{b+c+2x}$

両辺を$(c+x)(b+x)$で割ると，$b-x+c-x=\dfrac{a^2}{b+c+2x}$　$4x^2=(b+c+a)(b+c-a)$

$\therefore x^2=s(s-a)$

よって，AD＝$\sqrt{s(s-a)}$　答

(*)

証明　∠ADB＋∠ADC=180°であるから，$\cos\angle ADB+\cos\angle ADC=0$

余弦定理により，$\dfrac{x^2+y^2-c^2}{2xy}+\dfrac{x^2+z^2-b^2}{2xz}=0$

分母を払うと，$z(x^2+y^2-c^2)+y(x^2+z^2-b^2)=0$

整理すると，$zc^2+yb^2=(y+z)(x^2+yz)$

$y+z=a$ を代入すると，$zc^2+yb^2=a(x^2+yz)$　終

(2023/5/11　ジョーカー)