第 422 回

次の 2 重根号を外せ。

(1)　$\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}$

(2)　$\sqrt[3]{3(\sqrt[3]{2}-1)^2}$

解答

(1)　$\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}=a+b\sqrt{5}$（$a$，$b$ は 0 でない有理数）…①とおき，両辺を 3 乗すると，

$9+4\sqrt{5}=(a^3+15ab^2)+(3a^2b+5b^3)\sqrt{5}$

$\sqrt{5}$ は無理数，a^3+15ab^2，$3a^2b+5b^3$ は有理数であるから(*)，$a^3+15ab^2=9$　…②　$3a^2b+5b^3=4$　…③

②× 4 −③× 9 より，$(a-3b)(4a^2-15ab+15b^2)=0$

$\therefore a=3b$，$4a^2-15ab+15b^2=0$

後式は，$4a^2-15ab+15b^2=15\left(b-\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{a^2}{4}>0$ より，a，b の有理数解はない。（$\because a\neq 0$，$b\neq 0$）

従って，$a=3b$ を③に代入すると，$3(3b)^2b+5b^3=4$　$b^3=\dfrac{1}{8}$

b は有理数であるから，$b=\dfrac{1}{2}$，$a=\dfrac{3}{2}$

これらを①に代入して，$\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{5}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$　答

(*)

p，q，p'，q' が有理数のとき，

[1]　$p+q\sqrt{5}=0 \Leftrightarrow p=q=0$

[2]　$p+q\sqrt{5}=p'+q'\sqrt{5} \Leftrightarrow p=p'$，$q=q'$

証明 [1]　（$\Longleftarrow$）自明

（$\Longrightarrow$）$q\neq 0$ と仮定すると，$\sqrt{5}=-\dfrac{p}{q}$　これは矛盾（∵左辺は無理数，右辺は有理数）

よって，$q=0$，$p=0$　終

[2]　等式を変形すると，$(p-p')+(q-q')\sqrt{5}=0$　[1] より，$p-p'=q-q'=0$　$\therefore p=p'$，$q=q'$　終

(2)　$\sqrt[3]{3(\sqrt[3]{2}-1)^2}=\sqrt[3]{3(\sqrt[3]{4}-2\sqrt[3]{2}+1)}=\sqrt[3]{4-3\sqrt[3]{4^2}+3\sqrt[3]{4}-1}=\sqrt[3]{(\sqrt[3]{4}-1)^3}=\sqrt[3]{4}-1$　答

追加問題 1

a，b，c，d は素数で，$a>b>c>d$，$a^2+b^2+c^2+d^2=2023$ を満たしている。

$a+b+c+d$ の値が最大になるとき，a，b，c，d の値を求めよ。

解答　2023 は奇数であるから，a，b，c，d すべてが奇数ということはあり得ない。また，偶数の素数は 2 だけであるから，a, b, c は奇数の素数で，$d=2$ である。

このとき，$a^2+b^2+c^2+2^2=2023$ より，$a^2+b^2+c^2=2019$　…①

$\sqrt{\dfrac{2019}{3}}=25.9\cdots$，$\sqrt{2019-5^2-3^2}=44.5\cdots$ であるから，$26\leqq a\leqq 44$

この範囲内の素数は，$a=43$，41，37，31，29 である。

(1)　$a=43$ のとき，①より，$b^2+c^2=170$　これを満たす素数 b，c は，$(b,\ c)=(11,\ 7)$

このとき，$a+b+c+d=43+11+7+2=63$

(2)　$a=41$ のとき，①より，$b^2+c^2=338$　これを満たす素数 b，c は，$(b,\ c)=(17,\ 7)$

このとき，$a+b+c+d=41+17+7+2=67$

(3)　$a=37$ のとき，①より，$b^2+c^2=650$　これを満たす素数 b，c は，$(b,\ c)=(23,\ 11)$，$(19,\ 17)$

このとき，$a+b+c+d=37+23+11+2=73$，$a+b+c+d=37+19+17+2=75$

(4)　$a=31$ のとき，①より，$b^2+c^2=1058$　これを満たす素数 b，c は，$(b,\ c)=(23,\ 23)$

しかし，$b>c$ でなければならないから不適である。

(5)　$a=29$ のとき，①より，$b^2+c^2=1178$　これを満たす素数 b，c はない。

（$\because$）$a>b$ であるから，$b=23$ とすると，$c^2=649>b^2$ となり不適である。

以上，(1)〜(5) より，$a+b+c+d$ の値が最大になるのは，$(a,\ b,\ c,\ d)=(37,\ 19,\ 17,\ 2)$　答

(2023/1/8　ジョーカー)

追加問題 2 次の条件を満たす整数 n を 100 で割った余りを求めよ。 $n\leqq(5+2\sqrt{5})^{2023}<n+1$（2019 年早稲田大学入試問題を改題）

解答　二項定理により，

$$(a+b)^{2023}+(a-b)^{2023}=2a^{2023}+2\cdot{}_{2023}C_2a^{2021}b^2+2\cdot{}_{2023}C_4a^{2019}b^4+\cdots+2\cdot{}_{2023}C_{2022}ab^{20022}$$

$$=2a\cdot a^{2020}+ab^2\left(2\cdot{}_{2023}C_2a^{2020}+2\cdot{}_{2023}C_4a^{2018}b^2+\cdots+2\cdot{}_{2023}C_{2022}b^{2020}\right)$$ である。

ここで，$a=5$，$b=2\sqrt{5}$ とすると，

$2a=10$，$ab^2=100$，カッコの中は正の整数であるから，A とおくと，

$(5+2\sqrt{5})^{2023}+(5-2\sqrt{5})^{2023}=10\cdot5^{2020}+100A$

5^{2020} の一の位は 5 であるから，$5^{2020}=5+10B$（B は正の整数）とおくと，

$(5+2\sqrt{5})^{2023}+(5-2\sqrt{5})^{2023}=10(5+10B)+100A=50+100(A+B)$

$\therefore(5-2\sqrt{5})^{2023}=50+100(A+B)-(5+2\sqrt{5})^{2023}$　…①

ここで，$2\sqrt{5}=\sqrt{20}$，$4<\sqrt{20}<5$ より，$0<5-2\sqrt{5}<1$ であるから，$0<(5-2\sqrt{5})^{2023}<1$

これに①を代入すると，$0<50+100(A+B)-(5+2\sqrt{5})^{2023}<1$

$\therefore49+100(A+B)<(5+2\sqrt{5})^{2023}<50+100(A+B)$

よって，$n\leqq(5+2\sqrt{5})^{2023}<n+1$ を満たす整数 n は，$n=49+100(A+B)$ であり，

この n を 100 で割った余りは　49　答

補足

次の条件を満たす整数 n を 1000 で割った余りを求めよ。

$n \leqq (5+2\sqrt{5})^{2023} < n+1$

解答 便宜的に，$a=5$，$b=2\sqrt{5}$ とおくと，$2a=10$，$b^2=4a$，$2a^2b^2=1000$ であるから，二項定理により，

$$(a+b)^{2023}+(a-b)^{2023}=2a^{2023}+2\cdot{}_{2023}C_2a^{2021}b^2+2\cdot{}_{2023}C_4a^{2019}b^4+\cdots+2\cdot{}_{2023}C_{2022}ab^{20022}$$

$$=2a\cdot a^{2020}+2ab^2({}_{2023}C_2a^{2020}+{}_{2023}C_4a^{2018}b^2+\cdots+{}_{2023}C_{2022}b^{2020})=★$$

カッコの中の末項は，${}_{2023}C_{2022}b^{2020}={}_{2023}C_{2022}b^{2018}\cdot b^2={}_{2023}C_{2022}b^{2018}\cdot 4a$ であるから，

$$★=2a\cdot a^{2020}+2ab^2({}_{2023}C_2a^{2020}+{}_{2023}C_4a^{2018}b^2+\cdots+{}_{2023}C_{2022}b^{2018}\cdot 4a)$$

$$=2a\cdot a^{2020}+2a^2b^2({}_{2023}C_2a^{2019}+{}_{2023}C_4a^{2017}b^2+\cdots+{}_{2023}C_{2022}b^{2018}\cdot 4)$$

$$=10\cdot a^{2020}+1000({}_{2023}C_2a^{2019}+{}_{2023}C_4a^{2017}b^2+\cdots+{}_{2023}C_{2022}b^{2018}\cdot 4)$$

カッコの中は正の整数であるから，A とおくと，

$(5+2\sqrt{5})^{2023}+(5-2\sqrt{5})^{2023}=10\cdot 5^{2020}+1000A$

5^{2020} の下二桁は 25 であるから，$5^{2020}=25+100B$ （B は正の整数）とおくと，

$(5+2\sqrt{5})^{2023}+(5-2\sqrt{5})^{2023}=10(25+100B)+1000A=250+1000(A+B)$

$\therefore (5-2\sqrt{5})^{2023}=250+1000(A+B)-(5+2\sqrt{5})^{2023}$ …①

ここで，$2\sqrt{5}=\sqrt{20}$，$4<\sqrt{20}<5$ より，$0<5-2\sqrt{5}<1$ であるから，$0<(5-2\sqrt{5})^{2023}<1$

これに①を代入すると，$0<250+1000(A+B)-(5+2\sqrt{5})^{2023}<1$

$\therefore 249+100(A+B)<(5+2\sqrt{5})^{2023}<250+100(A+B)$

よって，$n\leqq(5+2\sqrt{5})^{2023}<n+1$ を満たす整数 n は，$n=249+1000(A+B)$ であり，

この n を 1000 で割った余りは　249　答

（2023/1/8　ジョーカー）