第 422 回

次の 2 重根号を外せ。

(1) $\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}=\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})^2}$

(2) $\sqrt[3]{3(\sqrt[3]{2}-1)^2}$

解答

(1) $\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}=a+b\sqrt{5}$ （a，b は 0 でない有理数）…①とおき，両辺を 3 乗すると，

$9+4\sqrt{5}=(a^3+15ab^2)+(3a^2b+5b^3)\sqrt{5}$

$\sqrt{5}$ は無理数，a^3+15ab^2，$3a^2b+5b^3$ は有理数であるから (*)，$a^3+15ab^2=9$ …②　$3a^2b+5b^3=4$ …③

②× 4 −③× 9 より，$(a-3b)(4a^2-15ab+15b^2)=0$

$\therefore a=3b$，$4a^2-15ab+15b^2=0$

後式は，$4a^2-15ab+15b^2=15\left(b-\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{a^2}{4}>0$ より，a，b の有理数解はない。（$\because a\fallingdotseq 0$，$b\fallingdotseq 0$）

従って，$a=3b$ を③に代入すると，$3(3b)^2b+5b^3=4$　$b^3=\dfrac{1}{8}$

b は有理数であるから，$b=\dfrac{1}{2}$，$a=\dfrac{3}{2}$

これらを①に代入して，$\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{5}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ 答

(*)

p，q，p'，q' が有理数のとき，

[1] $p+q\sqrt{5}=0 \Leftrightarrow p=q=0$

[2] $p+q\sqrt{5}=p'+q'\sqrt{5} \Leftrightarrow p=p'$，$q=q'$

証明 [1] （$\Longleftarrow$）自明

（$\Longrightarrow$）$q\fallingdotseq 0$ と仮定すると，$\sqrt{5}=-\dfrac{p}{q}$　これは矛盾（∵左辺は無理数，右辺は有理数）

よって，$q=0$，$p=0$ 終

[2] 等式を変形すると，$(p-p')+(q-q')\sqrt{5}=0$　[1] より，$p-p'=q-q'=0$　$\therefore p=p'$，$q=q'$ 終

別解 $\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}=a$，$\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}=b$ とおくと，$a^3+b^3=18$，$ab=1$

後式より得られる $b=\dfrac{1}{a}$ を，前式に代入すると，$a^3+\dfrac{1}{a^3}=18$

変形すると，$\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^3-3\left(a+\dfrac{1}{a}\right)-18=0$

因数分解すると，$\left(a+\dfrac{1}{a}-3\right)\left\{\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2+3\left(a+\dfrac{1}{a}\right)+6\right\}=0$

$\therefore a+\dfrac{1}{a}=3$，$\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2+3\left(a+\dfrac{1}{a}\right)+6=0$

[1] $a+\dfrac{1}{a}=3$ のとき，$a=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$　$a=\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}>\sqrt[3]{8}=2$ より，$a=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

[2] $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2+3\left(a+\dfrac{1}{a}\right)+6=0$ のとき，これを満たす実数解 a は存在しない。

よって， $a=\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ 答

(2) $\sqrt[3]{3(\sqrt[3]{2}-1)^2}=\sqrt[3]{3(\sqrt[3]{4}-2\sqrt[3]{2}+1)}=\sqrt[3]{4-3\sqrt[3]{4^2}+3\sqrt[3]{4}-1}=\sqrt[3]{(\sqrt[3]{4}-1)^3}=\sqrt[3]{4}-1$ 答

追加問題1
a， b， c， d は素数で， $a>b>c>d$， $a^2+b^2+c^2+d^2=2023$ を満たしている。 $a+b+c+d$ の値が最大になるとき， a， b， c， d の値を求めよ。

解答　2023 は奇数であるから， a， b， c， d すべてが奇数ということはあり得ない。また，偶数の素数は 2 だけであるから， a, b, c は奇数の素数で， $d=2$ である。

このとき，$a^2+b^2+c^2+2^2=2023$ より， $a^2+b^2+c^2=2019$ …①

$\sqrt{\dfrac{2019}{3}}=25.9\cdots$， $\sqrt{2019-5^2-3^2}=44.5\cdots$ であるから， $26\leqq a\leqq 44$

この範囲内の素数は， $a=43$， 41， 37， 31， 29 である。

(1) $a=43$ のとき，①より， $b^2+c^2=170$ 　これを満たす素数 b, c は，$(b, c)=(11, 7)$

このとき， $a+b+c+d=43+11+7+2=63$

(2) $a=41$ のとき，①より， $b^2+c^2=338$ 　これを満たす素数 b, c は，$(b, c)=(17, 7)$

このとき， $a+b+c+d=41+17+7+2=67$

(3) $a=37$ のとき，①より， $b^2+c^2=650$ 　これを満たす素数 b, c は，$(b, c)=(23, 11)$，$(19, 17)$

このとき， $a+b+c+d=37+23+11+2=73$， $a+b+c+d=37+19+17+2=75$

(4) $a=31$ のとき，①より， $b^2+c^2=1058$ 　これを満たす素数 b, c は，$(b, c)=(23, 23)$

しかし， $b>c$ でなければならないから不適である。

(5) $a=29$ のとき，①より， $b^2+c^2=1178$ 　これを満たす素数 b, c はない。

（∵） $a>b$ であるから， $b=23$ とすると， $c^2=649>b^2$ となり不適である。

以上，(1)～(5) より， $a+b+c+d$ の値が最大になるのは，$(a, b, c, d)=(37, 19, 17, 2)$ 答

追加問題2
次の条件を満たす整数 n を 100 で割った余りを求めよ。 $n\leqq(5+2\sqrt{5})^{2023}<n+1$ （2019 年早稲田大学入試問題を改題）

解答　二項定理により，

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{2023}+(a-b)^{2023}&=2a^{2023}+2\cdot{}_{2023}C_2a^{2021}b^2+2\cdot{}_{2023}C_4a^{2019}b^4+\cdots+2\cdot{}_{2023}C_{2022}ab^{2022}\\
&=2a\cdot a^{2022}+ab^2\left(2\cdot{}_{2023}C_2a^{2020}+2\cdot{}_{2023}C_4a^{2018}b^2+\cdots+2\cdot{}_{2023}C_{2022}b^{2020}\right)
\end{aligned}
$$
である。

ここで， $a=5$， $b=2\sqrt{5}$ とすると，

$2a=10$， $ab^2=100$，カッコの中は正の整数であるから， A とおくと，

$(5+2\sqrt{5})^{2023}+(5-2\sqrt{5})^{2023}=10\cdot5^{2022}+100A$

5^{2022} の一の位は 5 であるから， $5^{2022}=5+10B$ （ B は正の整数）とおくと，

$(5+2\sqrt{5})^{2023}+(5-2\sqrt{5})^{2023}=10(5+10B)+100A=50+100(A+B)$

$\therefore(5-2\sqrt{5})^{2023}=50+100(A+B)-(5+2\sqrt{5})^{2023}\quad\cdots①$

ここで，$2\sqrt{5}=\sqrt{20}$，$4<\sqrt{20}<5$ より，$0<5-2\sqrt{5}<1$ であるから，$0<(5-2\sqrt{5})^{2023}<1$

これに①を代入すると，$0<50+100(A+B)-(5+2\sqrt{5})^{2023}<1$

$\therefore 49+100(A+B)<(5+2\sqrt{5})^{2023}<50+100(A+B)$

よって，$n\leqq(5+2\sqrt{5})^{2023}<n+1$ を満たす整数 n は，$n=49+100(A+B)$ であり，

この n を 100 で割った余りは　49　答

発展

次の条件を満たす整数 n を 1000 で割った余りを求めよ。

$n\leqq(5+2\sqrt{5})^{2023}<n+1$

解答　便宜的に，$a=5$，$b=2\sqrt{5}$ とおくと，$2a=10$，$b^2=4a$，$2a^2b^2=1000$ であるから，二項定理により，

$$(a+b)^{2023}+(a-b)^{2023}=2a^{2023}+2\cdot{}_{2023}C_2a^{2021}b^2+2\cdot{}_{2023}C_4a^{2019}b^4+\cdots+2\cdot{}_{2023}C_{2022}ab^{2022}$$

$$=2a\cdot a^{2022}+2ab^2({}_{2023}C_2a^{2020}+{}_{2023}C_4a^{2018}b^2+\cdots+{}_{2023}C_{2022}b^{2020})=★$$

カッコの中の末項は，${}_{2023}C_{2022}b^{2020}={}_{2023}C_{2022}b^{2018}\cdot b^2={}_{2023}C_{2022}b^{2018}\cdot 4a$ であるから，

$$★=2a\cdot a^{2022}+2ab^2({}_{2023}C_2a^{2020}+{}_{2023}C_4a^{2018}b^2+\cdots+{}_{2023}C_{2022}b^{2018}\cdot 4a)$$

$$=2a\cdot a^{2022}+2a^2b^2({}_{2023}C_2a^{2019}+{}_{2023}C_4a^{2017}b^2+\cdots+{}_{2023}C_{2022}b^{2018}\cdot 4)$$

$$=10\cdot a^{2022}+1000({}_{2023}C_2a^{2019}+{}_{2023}C_4a^{2017}b^2+\cdots+{}_{2023}C_{2022}b^{2018}\cdot 4)$$

カッコの中は正の整数であるから，A とおくと，

$(5+2\sqrt{5})^{2023}+(5-2\sqrt{5})^{2023}=10\cdot 5^{2020}+1000A$

5^{2022} の下二桁は 25 であるから，$5^{2022}=25+100B$（B は正の整数）とおくと，

$(5+2\sqrt{5})^{2023}+(5-2\sqrt{5})^{2023}=10(25+100B)+1000A=250+1000(A+B)$

$\therefore(5-2\sqrt{5})^{2023}=250+1000(A+B)-(5+2\sqrt{5})^{2023}\quad\cdots①$

ここで，$2\sqrt{5}=\sqrt{20}$，$4<\sqrt{20}<5$ より，$0<5-2\sqrt{5}<1$ であるから，$0<(5-2\sqrt{5})^{2023}<1$

これに①を代入すると，$0<250+1000(A+B)-(5+2\sqrt{5})^{2023}<1$

$\therefore 249+100(A+B)<(5+2\sqrt{5})^{2023}<250+100(A+B)$

よって，$n\leqq(5+2\sqrt{5})^{2023}<n+1$ を満たす整数 n は，$n=249+1000(A+B)$ であり，

この n を 1000 で割った余りは　249　答

補足　さらに，同様な計算をすると，

条件 $n\leqq(5+2\sqrt{5})^{2023}<n+1$ を満たす整数 n を 10000 で割った余りは，1249 となる。

（2023/1/8　ジョーカー）

（2023/1/9 別解追加）