第 422 回

次の２重根号を外せ。

(1)　$\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}=\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})^2}$

(2)　$\sqrt[3]{3(\sqrt[3]{2}-1)^2}$

解答

(1)　$\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}=a+b\sqrt{5}$　（a，b は０でない有理数）…①とおき，両辺を３乗すると，

$9+4\sqrt{5}=(a^3+15ab^2)+(3a^2b+5b^3)\sqrt{5}$

$\sqrt{5}$ は無理数，a^3+15ab^2，$3a^2b+5b^3$ は有理数であるから(*)，$a^3+15ab^2=9$　…②　$3a^2b+5b^3=4$　…③

②×４－③×９より，$(a-3b)(4a^2-15ab+15b^2)=0$

$\therefore a=3b$，$4a^2-15ab+15b^2=0$

後式は，$4a^2-15ab+15b^2=15\left(b-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}>0$ より，a，b の有理数解はない。（$\because a\fallingdotseq 0$，$b\fallingdotseq 0$）

従って，$a=3b$ を③に代入すると，$3(3b)^2b+5b^3=4$　$b^3=\frac{1}{8}$

b は有理数であるから，$b=\frac{1}{2}$，$a=\frac{3}{2}$

これらを①に代入して，$\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$　答

(*)

p，q，p'，q' が有理数のとき，

[1]　$p+q\sqrt{5}=0 \Leftrightarrow p=q=0$

[2]　$p+q\sqrt{5}=p'+q'\sqrt{5} \Leftrightarrow p=p'$，$q=q'$

証明　[1]　($\Longleftarrow$)　自明

($\Longrightarrow$)　$q\fallingdotseq 0$ と仮定すると，$\sqrt{5}=-\frac{p}{q}$　これは矛盾（∵左辺は無理数，右辺は有理数）

よって，$q=0$，$p=0$　終

[2]　等式を変形すると，$(p-p')+(q-q')\sqrt{5}=0$　[1] より，$p-p'=q-q'=0$　$\therefore p=p'$，$q=q'$　終

別解　$\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}=a$，$\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}=b$ とおくと，$a^3+b^3=18$，$ab=1$

後式より得られる $b=\frac{1}{a}$ を，前式に代入すると，$a^3+\frac{1}{a^3}=18$

変形すると，$\left(a+\frac{1}{a}\right)^3-3\left(a+\frac{1}{a}\right)-18=0$

因数分解すると，$\left(a+\frac{1}{a}-3\right)\left\{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+3\left(a+\frac{1}{a}\right)+6\right\}=0$

$\therefore a+\frac{1}{a}=3$，$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+3\left(a+\frac{1}{a}\right)+6=0$

[1]　$a+\frac{1}{a}=3$ のとき，$a=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$　　$a=\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}>\sqrt[3]{8}=2$ より，$a=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

[2]　$\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2+3\left(a+\dfrac{1}{a}\right)+6=0$ のとき，これを満たす実数解 a は存在しない。

よって，$a=\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$　答

(2)　$\sqrt[3]{3(\sqrt[3]{2}-1)^2}=\sqrt[3]{3(\sqrt[3]{4}-2\sqrt[3]{2}+1)}=\sqrt[3]{4-3\sqrt[3]{4^2}+3\sqrt[3]{4}-1}=\sqrt[3]{(\sqrt[3]{4}-1)^3}=\sqrt[3]{4}-1$　答

追加問題 1 a，b，c，d は素数で，$a>b>c>d$，$a^2+b^2+c^2+d^2=2023$ を満たしている。 $a+b+c+d$ の値が最大になるとき，a，b，c，d の値を求めよ。

解答　2023 は奇数であるから，a，b，c，d すべてが奇数ということはあり得ない。また，偶数の素数は 2 だけであるから，a, b, c は奇数の素数で，$d=2$ である。

このとき，$a^2+b^2+c^2+2^2=2023$ より，$a^2+b^2+c^2=2019$　…①

$\sqrt{\dfrac{2019}{3}}=25.9\cdots$，$\sqrt{2019-5^2-3^2}=44.5\cdots$ であるから，$26\leqq a\leqq 44$

この範囲内の素数は，$a=43$，41，37，31，29 である。

(1)　$a=43$ のとき，①より，$b^2+c^2=170$　これを満たす素数 b, c は，$(b, c)=(11, 7)$

このとき，$a+b+c+d=43+11+7+2=63$

(2)　$a=41$ のとき，①より，$b^2+c^2=338$　これを満たす素数 b, c は，$(b, c)=(17, 7)$

このとき，$a+b+c+d=41+17+7+2=67$

(3)　$a=37$ のとき，①より，$b^2+c^2=650$　これを満たす素数 b, c は，$(b, c)=(23, 11)$，$(19, 17)$

このとき，$a+b+c+d=37+23+11+2=73$，$a+b+c+d=37+19+17+2=75$

(4)　$a=31$ のとき，①より，$b^2+c^2=1058$　これを満たす素数 b, c は，$(b, c)=(23, 23)$

しかし，$b>c$ でなければならないから不適である。

(5)　$a=29$ のとき，①より，$b^2+c^2=1178$　これを満たす素数 b, c はない。

（∵）$a>b$ であるから，$b=23$ とすると，$c^2=649>b^2$ となり不適である。

以上，(1)～(5) より，$a+b+c+d$ の値が最大になるのは，$(a, b, c, d)=(37, 19, 17, 2)$　答

追加問題 2 次の条件を満たす整数 n を 100 で割った余りを求めよ。 $n\leqq(5+2\sqrt{5})^{2023}<n+1$（2019 年早稲田大学入試問題を改題）

この問題は，換言すると，$(5+2\sqrt{5})^{2023}$ の整数部分を 100 で割った余りを求める問題である。

この問題を次のように改題し，考えてみた。

$n=1, 2, 3, 4, 5$ のとき，$(5+2\sqrt{5})^{2023}$ の整数部分を 10^n で割った余りをそれぞれ求めよ。

なお，$\log_{10}(5+2\sqrt{5})^{2023}\fallingdotseq 1975.35$ であるから，$(5+2\sqrt{5})^{2023}$ の整数部分は 1976 桁である。

$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ のとき，$(5+2\sqrt{5})^{2023}$ の整数部分を 10^n で割った余りをそれぞれ求めよ。

解答 便宜的に，$a=5$ ，$b=2\sqrt{5}$ とおくと，$b^2=4a$ であるから，二項定理により，

$(5+2\sqrt{5})^{2023}+(5-2\sqrt{5})^{2023}=(a+b)^{2023}+(a-b)^{2023}$

$=2a^{2023}+2\cdot{}_{2023}C_2a^{2021}b^2+2\cdot{}_{2023}C_4a^{2019}b^4+2\cdot{}_{2023}C_6a^{2017}b^6+\cdots+2\cdot{}_{2023}C_{2022}ab^{2022}$

$=2a^{2023}+2\cdot{}_{2023}C_2a^{2021}\cdot 4a+2\cdot{}_{2023}C_4a^{2019}(4a)^2+2\cdot{}_{2023}C_6a^{2017}(4a)^3+\cdots+2\cdot{}_{2023}C_{2022}a(4a)^{1011}=N$ …①

（二項係数は正の整数であるから，この和も正の整数となり N とおいた。）

ここで，$2\sqrt{5}=\sqrt{20}$ ，$4<\sqrt{20}<5$ より，$0<5-2\sqrt{5}<1$ であるから，

$0<(5-2\sqrt{5})^{2023}<1$ より，$0<1-(5-2\sqrt{5})^{2023}<1$ である。

$(5+2\sqrt{5})^{2023}+(5-2\sqrt{5})^{2023}=N$ より，$(5+2\sqrt{5})^{2023}=N-1+\{1-(5-2\sqrt{5})^{2023}\}$

$(5+2\sqrt{5})^{2023}$ の整数部分は $N-1$ となるから，

$(5+2\sqrt{5})^{2023}$ の整数部分を 10^n で割った商を k ，余りを l とすると，$N-1=k\cdot 10^n+l$ である。

[1] $n=1$ のとき，①より，$N=2a\{a^{2022}+{}_{2023}C_2a^{2020}\cdot 4a+{}_{2023}C_4a^{2018}(4a)^2+\cdots+{}_{2023}C_{2022}(4a)^{1011}\}$

$=10A$ （{ }の中は正の整数であるから A とおいた。）

N は10の倍数であるから，$N-1$ を10で割った余りは，$l=9$ 答

[2] $n=2$ のとき，①より，

$N=2a\cdot a^{2022}+(2a)^2\{2\cdot{}_{2023}C_2a^{2020}+2\cdot{}_{2023}C_4a^{2019}\cdot 4+\cdots+2\cdot{}_{2023}C_{2022}(4a)^{1010}\}$

$=10\cdot 5^{2022}+10^2B_1$ （{ }の中は正の整数であるから B_1 とおいた。）

5^{2022} の一の位は5であるから，$5^{2022}=10B_2+5$ （B_2 は正の整数）とおくと，

$N=10(10B_2+5)+10^2B_1=10^2(B_1+B_2)+50$

よって，$N-1$ を 10^2 で割った余りは，$l=49$ 答（これが追加問題２の答である。）

[3] $n=3$ のとき，①より，

$N=2a\cdot a^{2022}+(2a)^3\{{}_{2023}C_2a^{2019}+{}_{2023}C_4a^{2018}\cdot 4+\cdots+{}_{2023}C_{2022}\cdot 2(4a)^{1009}\}$

$=10\cdot 5^{2022}+10^3C_1$ （{ }の中は正の整数であるから C_1 とおいた。）

また，$5^2=25$ ，$5^3=125$ ，…であるから，5^{2022} の下二桁は25である。

$5^{2022}=10^2C_2+25$ （C_2 は正の整数）とおくと，$N=10(10^2C_2+25)+10^3C_1=10^3(C_1+C_2)+250$

よって，$N-1$ を 10^3 で割った余りは，$l=249$ 答

[4] $n=4$ のとき，①より，

$N=2a\cdot a^{2021}(a+{}_{2023}C_2\cdot 4)+(2a)^4\{2\cdot{}_{2023}C_4a^{2017}+2\cdot{}_{2023}C_6a^{2015}(4a)+\cdots+2\cdot{}_{2023}C_{2022}\cdot 4(4a)^{1008}\}$

$=10\cdot 5^{2021}(5+{}_{2023}C_2\cdot 4)+10^4D_1$ （{ }の中は正の整数であるから，D_1 とおいた。）

ここで，５の累乗の下三桁を調べる。

$5^3=125$ ，$5^4=625$ ，$5^5=3125$ ，$5^6=15625$ ，…より，

整数 m を $m\geqq 2$ とすると，5^{2m-1} ，5^{2m} の下三桁はそれぞれ125，625であることが分かる。

$\therefore 5^{2021}=5^{2\cdot 1011-1}=10^3D_2+125$ （D_2 は正の整数）とおける。

また，$5+{}_{2023}C_2\cdot 4=5+\dfrac{2023\cdot 2022}{2\cdot 1}\cdot 4=5+8181012=10^4\times 818+1017$ であるから，

$N=10(10^3D_2+125)(10^4\times 818+1017)+10^4D_1$

$= 10^8 D_2 \cdot 818 + 10^4(D_2 \cdot 1017 + 1250 \cdot 818) + 1271250 + 10^4 D_1$

$= 10^4 D_3 + 1250$ （$D_3 = 10^4 D_2 \cdot 818 + D_2 \cdot 1017 + 1250 \cdot 818 + 127 + D_1$ は正の整数）

よって，$N-1$ を 10^4 で割った余りは　$l = 1249$　答

[5]　$n=5$ のとき，①より，

$N = 2a \cdot a^{2021}(a + {}_{2023}C_2 \cdot 4) + (2a)^5\{{}_{2023}C_4 a^{2016} + {}_{2023}C_6 a^{2014}(4a) + \cdots + {}_{2023}C_{2022} \cdot 4(4a)^{1007}\}$

$= 10 \cdot 5^{2021}(5 + {}_{2023}C_2 \cdot 4) + 10^5 E_1$　（{ } の中は正の整数であるから，E_1 とおいた。）

ここで，5 の累乗の下四桁を調べる。

$5^2 = 25$，$5^3 = 125$，$5^4 = 625$，$5^5 = 3125$，3125×5 より，5^6 の下四桁は 5625，

5625×5 より，5^7 の下四桁は 8125，8125×5 より，5^8 の下四桁は 0625，… となるから，

整数 m を $m \geqq 2$ とすると，

5^{4m-3}，5^{4m-2}，5^{4m-1}，5^{4m} の下四桁はそれぞれ 3125，5625，8125，0625 であることが分かる。

$\therefore 5^{2021} = 5^{4 \cdot 506 - 3} = 10^4 E_2 + 3125$ （E_2 は正の整数）とおける。

また，$5 + {}_{2023}C_2 \cdot 4 = 5 + \dfrac{2023 \cdot 2022}{2 \cdot 1} \cdot 4 = 5 + 8181012 = 10^5 \times 81 + 81017$ であるから，

$N = 10(10^4 E_2 + 3125)(10^5 \times 81 + 81017) + 10^5 E_1$

$= 10^{10} \cdot 81 E_2 + 10^5(81017 E_2 + 3125 \cdot 81) + 31250 \cdot 81017 + 10^5 E_1$

ここで，$31250 \cdot 81017 = (31 \cdot 10^3 + 250)(81 \cdot 10^3 + 17) = 31 \cdot 81 \cdot 10^6 + (31 \cdot 17 + 250 \cdot 81) \cdot 10^3 + 250 \cdot 17$

$= 2511 \cdot 10^6 + 20777 \cdot 10^3 + 4250 = 10^5(2511 \cdot 10 + 207) + 77000 + 4250$

$= 10^5 \cdot 25317 + 81250$ であるから，

$N = 10^{10} \cdot 81 E_2 + 10^5(81017 E_2 + 3125 \cdot 81) + 10^5 \cdot 25317 + 81250 + 10^5 E_1 = 10^5 E_3 + 81250$

（$E_3 = 10^5 \cdot 81 E_2 + 81017 E_2 + 3125 \cdot 81 + 25317 + E_1$ は正の整数）

よって，$N-1$ を 10^5 で割った余りは　$l = 81249$　答

（2023/1/8　ジョーカー）

（2023/1/9 別解追加）

（2023/1/15　追加問題 2 で，$n = 1, 2, 3, 4, 5$ のとき，$(5 + 2\sqrt{5})^{2023}$ の整数部分を 10^n で割った余りとして解答）