● 問題 422 解答＜三角定規＞

（1） $9+4\sqrt{5}=(a+b\sqrt{5})^3$ （a, b : 有理数）と置いて展開し

$a^3+15ab^2=9$ …① $3a^2b+5b^3=4$ …②

①× 4−②× 9 : $4a^3-27a^2b+60ab^2-45b^3=0$ …③

③の両辺を b^3 で割り $\dfrac{a}{b}=u$ と置くと

$4u^3-27u^2+60u-45=(u-3)(4u^2-15u+15)=0$ …④

$4u^2-15u+15=\left(2u-\dfrac{15}{4}\right)^2+\dfrac{15}{16}>0$ だから，④より $u=3$, $a=3b$ …⑤

①⑤を解いて $a=\dfrac{3}{2}$, $b=\dfrac{1}{2}$

以上より， $\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}=\boldsymbol{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}$ …[答]

（２） $\sqrt[3]{3(\sqrt[3]{2}-1)^2}$

$\sqrt[3]{2}=a$ と置くと $a^3=2$

$3(\sqrt[3]{2}-1)^2=(4-1)(a-1)^2=((a^2)^3-1)(a-1)^2=(a^2-1)(a^4+a^2+1)(a-1)^2$

$=(a^2-1)(2a+a^2+1)(a-1)^2=(a+1)^3(a-1)^3$

∴ $\sqrt[3]{3(\sqrt[3]{2}-1)^2}=(a+1)(a-1)=a^2-1=\boldsymbol{\sqrt[3]{4}-1}$ （$=0.587\cdots$） …[答]

［追加問題１］

$a^2+b^2+c^2+d^2=2023$ （a,b,c,d : 素数, $a>b>c>d$） …①

a, b, c, d がすべて奇数のとき，①の左辺は偶数となり題意を満たさない。よって，$d=2$。

このとき $a^2+b^2+c^2=2019$ …②

(1) $a=43$ のとき， $b^2+c^2=2019-43^2=170$, このとき $b=11$, $c=7$

(2) $a=41$ のとき， $b^2+c^2=2019-41^2=338$, このとき $b=17$, $c=7$

(3) $a=37$ のとき， $b^2+c^2=2019-37^2=650$, このとき $(b,c)=(23, 11), (19, 17)$

(4) $a\leqq 31$ のとき，逐次調べて，②を満たす b, c はない。

以上より，①を満たす (a,b,c,d) は，$(43, 11, 7, 2)$, $(41, 17, 7, 2)$, $(37, 23, 11, 2)$, $(37, 19, 17, 2)$

これらの内 $a+b+c+d$ が最大となるのは $(a,b,c,d)=\boldsymbol{(37, 19, 17, 2)}$ …[答]

［問題２］

いろいろやってみましたが，解決できませんでした。で，数値計算をしてみると

$a_n=\left(5+2\sqrt{5}\right)^n$

$a_1=$ 9.472…

$a_2=$ 89.721…

$a_3=$ 849.852…

$a_4=$ 8,049.922…

$a_5=$ 76,249.959…

$a_6=$ 722,249.978…

$a_7=$ 6,841,249.988…

$a_8=$ 64,801,249.993…

$a_9=$ 613,806,249.996…

$a_{10}=$ 5,814,056,249.998…

$a_{11}=$ 55,071,531,249.9991…

$a_{12}=$ 521,645,031,249.9995…

$a_{13}=$ 4,941,092,656,249.9997…

………

となるようで，整数部分を 100 で割った余りは **49** になりそうです。

整数部分はさることながら，小数部分は 9999 …になるのでしょうか？