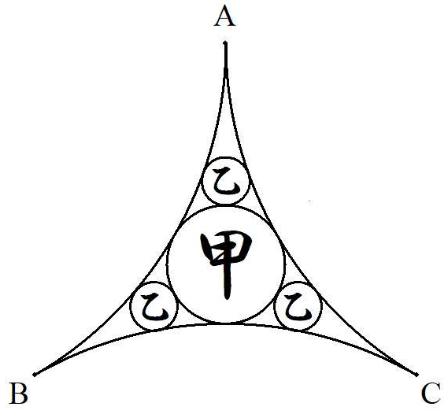
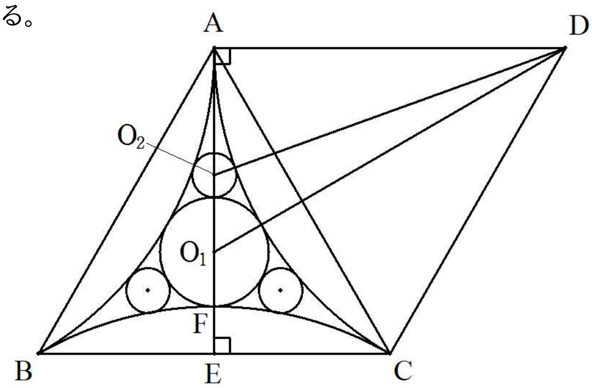
第423回

追加問題　1

A，B，Cは1辺の長さが1の正三角形の頂点で，
弧BC，CA，ABは半径1の円弧である。
図のようにこの図形の中に，互いに接する甲乙円を
配置する。
甲乙円の半径をそれぞれ求めよ。



解答　甲乙円を$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$とおき，図のように記号を付ける。



$\triangle O_1BE$は$\angle O_1BE=30°$，$BE=\dfrac{1}{2}$であるから，$O_1E=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

また，$FE=1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$であるから，$r_1+\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

$\therefore r_1=\dfrac{2\sqrt{3}-3}{3}$　（$\fallingdotseq 0.154701$）

このとき，$AF=\sqrt{3}-1$より，

$AO_2=\sqrt{3}-1-2r_1-r_2=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}-r_2$，

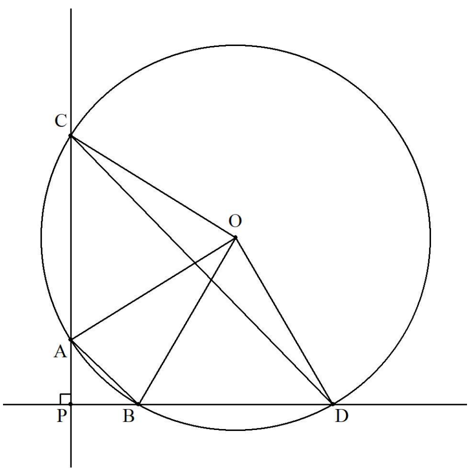
$O_2D=1+r_2$であるから，$\triangle O_2DA$に三平方の定理を適用すると，

$1^2+\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}-r_2\right)^2=(1+r_2)^2$　　$\therefore r_2=\dfrac{2-\sqrt{3}}{6-\sqrt{3}}=\dfrac{9-4\sqrt{3}}{33}$　（$\fallingdotseq 0.0627817$）

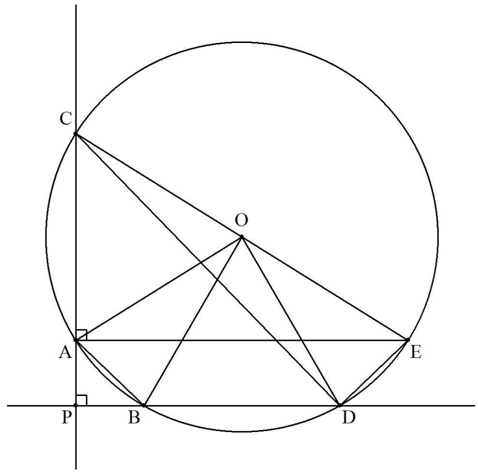
よって，各円の半径は，甲：$\dfrac{2\sqrt{3}-3}{3}$，乙：$\dfrac{9-4\sqrt{3}}{33}$　答

追加問題2

図のように，円Oに2直線PACとPBDが垂直に交わっているとき，△OABと△OCDの面積が等しいことを証明せよ。
ただし，点Pは円外にあり，点Oは円Oの中心とする。



証明　円周上に点 E を AE∥BD となるようにとる。
四角形 ABDE は等脚台形になるから，AB＝DE
∴△OAB≡△ODE（∵他の 2 辺は半径）　…①
また，仮定より，∠CPD＝90° で，AE∥PD より，
∠CAE＝90° となり，CE は円の直径となる。
△DEC において，DO は中線であるから，
△OCD＝△ODE　…②
よって，①，②より，△OAB＝△OCD　終



（2023/2/4　ジョーカー）