第 423 回　[剰余の周期性]

整式 $f(x)=x^m$ を整式 $P_n(x)$ で割った商を $Q_n(x)$，余りを $R_n(x)$ とする。
ただし，m，n は自然数，$Q_n(x)=0$ も可とする。
問 1　$m=2023$ のとき，次の問に答えよ。
(1)　$P_1(x)=x^2+1$ のとき，$R_1(x)$ を求めよ。
(2)　$P_2(x)=x^2+x+1$ のとき，$R_2(x)$ を求めよ。
(3)　$P_3(x)=x^3+x^2+x+1$ のとき，$R_3(x)$ を求めよ。
(4)　$P_4(x)=x^4+x^2+1$ のとき，$R_4(x)$ を求めよ。
(5)　$P_5(x)=x^4+1$ のとき，$R_5(x)$ を求めよ。
(6)　$P_6(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$ のとき，$R_6(x)$ を求めよ。
問 2　$R_n(x)$ の周期性を発見して，次の問に答えよ。
(1)　$R_1(x)=R_3(x)$ となる m の値を求めよ。
(2)　$R_2(x)=R_4(x)$ となる m の値を求めよ。
(3)　$R_3(x)=R_5(x)$ となる m の値を求めよ。
(4)　$R_4(x)=R_6(x)$ となる m の値を求めよ。
(5)　$R_1(x)=R_2(x)=R_3(x)=R_4(x)$ となる m の値を求めよ。
(6)　$R_1(x)=R_2(x)=R_3(x)=R_4(x)=R_5(x)$ となる m の値を求めよ。
(7)　$R_1(x)=R_2(x)=R_3(x)=R_4(x)=R_5(x)=R_6(x)$ となる m の値を求めよ。

解答

問 1　除法の原理により，$x^m=P_n(x)Q_n(x)+R_n(x)$ である。

(1)　恒等式 $x^m=Q_1(x)(x^2+1)+R_1(x)$ について，$m=1,\ 2,\ \cdots$ を代入すると，

$x=0\cdot(x^2+1)+x$，$x^2=1\cdot(x^2+1)-1$，$x^3=x(x^2+1)-x$，$x^4=(x^2-1)(x^2+1)+1$，$x^5=(x^3-x)(x^2+1)+x$，

$x^6=(x^4-x^2+1)(x^2+1)-1$，$x^7=(x^5-x^3+x)(x^2+1)-x$，$x^8=(x^6-x^4+x^2-1)(x^2+1)+1$，

$x^9=(x^7-x^5+\}x^3-x)(x^2+1)+x$，… より，

k を自然数として，$R_1(x)=\begin{cases} x & (m=4k-3=4(k-1)+1 \text{ のとき}) \\ -1 & (m=4k-2 \text{ のとき}) \\ -x & (m=4k-1 \text{ のとき}) \\ 1 & (m=4k \text{ のとき}) \end{cases}$　　（剰余の周期性）

よって，$m=2023=4\cdot506-1$ のとき，$R_1(x)=-x$　答

(2)　同様に計算して（計算は省略），$R_2(x)=\begin{cases} x & (m=3k-2=3(k-1)+1 \text{ のとき}) \\ -x-1 & (m=3k-1 \text{ のとき}) \\ 1 & (m=3k \text{ のとき}) \end{cases}$

より，$m=2023=3\cdot675-2$ のとき，$R_2(x)=x$　答

(3) $R_3(x)=\begin{cases} x & (m=4k-3=4(k-1)+1 \text{ のとき}) \\ x^2 & (m=4k-2 \text{ のとき}) \\ -x^2-x-1 & (m=4k-1 \text{ のとき}) \\ 1 & (m=4k \text{ のとき}) \end{cases}$

より，$m=2023=4\cdot 506-1$ のとき，$R_3(x)=-x^2-x-1$ 答

(4) $R_4(x)=\begin{cases} x & (m=6k-5=6(k-1)+1 \text{ のとき}) \\ x^2 & (m=6k-4=6(k-1)+2 \text{ のとき}) \\ x^3 & (m=6k-3=6(k-1)+3 \text{ のとき}) \\ -x^2-1 & (m=6k-2 \text{ のとき}) \\ -x^3-x & (m=6k-1 \text{ のとき}) \\ 1 & (m=6k \text{ のとき}) \end{cases}$ より，$m=2023=6\cdot 338-5$ のとき，$R_4(x)=x$ 答

(5) $R_5(x)=\begin{cases} x & (m=8k-7=8(k-1)+1 \text{ のとき}) \\ x^2 & (m=8k-6 \text{ のとき}) \\ x^3 & (m=8k-5 \text{ のとき}) \\ -1 & (m=8k-4 \text{ のとき}) \\ -x & (m=8k-3 \text{ のとき}) \\ -x^2 & (m=8k-2 \text{ のとき}) \\ -x^3 & (m=8k-1 \text{ のとき}) \\ 1 & (m=8k \text{ のとき}) \end{cases}$ より，$m=2023=8\cdot 253-1$ のとき，$R_5(x)=-x^3$ 答

(6) $R_6(x)=\begin{cases} x & (m=5k-4=5(k-1)+1 \text{ のとき}) \\ x^2 & (m=5k-3=5(k-1)+2 \text{ のとき}) \\ x^3 & (m=5k-2=5(k-1)+3 \text{ のとき}) \\ -x^3-x^2-x-1 & (m=5k-1 \text{ のとき}) \\ 1 & (m=5k \text{ のとき}) \end{cases}$

より，$m=2023=5\cdot 405-2$ のとき，$R_6(x)=x^3$ 答

問2

(1) 問1より，$R_1(x)=R_3(x)=x$ となるのは，$m=4k-3$

$R_1(x)=R_3(x)=1$ となるのは，$m=4k$

よって，$R_1(x)=R_3(x)$ となる m の値は，k を自然数として，$m=4k-3$，$4k$ のとき 答

(2) 問1より，$R_2(x)=R_4(x)=x$ となるのは，$m=6k-5=3(2k-1)-2$

$R_2(x)=R_4(x)=1$ となるのは，$m=6k=3\cdot 2k$

よって，$R_2(x)=R_4(x)$ となるのは，k を自然数として，$m=6k-5$，$6k$ のとき 答

(3) 問1より，$R_3(x)=R_5(x)=x$ となるのは，$m=8k-7=4(2k-1)-3$

$R_3(x)=R_5(x)=x^2$ となるのは，$m=8k-6=4(2k-1)-2$

$R_3(x)=R_5(x)=1$ となるのは，$m=8k=4\cdot 2k$

よって，$R_3(x)=R_5(x)$ となるのは，k を自然数として，$m=8k-7$，$8k-6$，$8k$ のとき 答

(4) 問1より，$R_4(x)=R_6(x)=x$ となるのは，$m=6\cdot 5(k-1)+1=30k-29$

$R_4(x)=R_6(x)=x^2$ となるのは，$m=6\cdot 5(k-1)+2=30k-28$

$R_4(x)=R_6(x)=x^3$ となるのは，$m=6\cdot 5(k-1)+3=30k-27$

$R_4(x)=R_6(x)=1$ となるのは，$m=6\cdot 5k=30k$

よって，$R_4(x)=R_6(x)$ となるのは，k を自然数として，$m=30k-29$，$30k-28$，$30k-27$，$30k$ のとき　答

⑸　⑴，⑵ より，$R_1(x)=R_2(x)=R_3(x)=R_4(x)=x$ となるのは，$m=4\cdot3(k-1)+1=12k-11$

$R_1(x)=R_2(x)=R_3(x)=R_4(x)=1$ となるのは，$m=4\cdot3k=12k$

よって，$R_1(x)=R_2(x)=R_3(x)=R_4(x)$ となるのは，k を自然数として，$m=12k-11$，$12k$ のとき　答

⑹　問１より，$R_1(x)=R_2(x)=R_3(x)=R_4(x)=R_5(x)=x$ となるのは，

k の係数が，4，3，4，6，8 で，それらの最小公倍数は 24 であるから，$m=24(k-1)+1$

$R_1(x)=R_2(x)=R_3(x)=R_4(x)=R_5(x)=1$ となるのは，同様に，$m=24k$

よって，$R_1(x)=R_2(x)=R_3(x)=R_4(x)=R_5(x)$ となるのは，k を自然数として，$m=12k-11$，$12k$ のとき　答

⑺　問１より，$R_1(x)=R_2(x)=R_3(x)=R_4(x)=R_5(x)=R_6(x)=x$ となるのは，

k の係数が，4，3，4，6，8，5 で，それらの最小公倍数は 120 であるから，$m=120(k-1)+1$

$R_1(x)=R_2(x)=R_3(x)=R_4(x)=R_5(x)=R_6(x)=1$ となるのは，同様に，$m=120k$

よって，$R_1(x)=R_2(x)=R_3(x)=R_4(x)=R_5(x)=R_6(x)$ となるのは，

k を自然数として，$m=120k-119$，$120k$ のとき　答

（2023/2/4　ジョーカー）

補足　参考に紹介された過去の大学入試問題について

⑴　【2021 早稲田大】 x^{2021} を x^4-x^2+1 で割った余りを求めよ。

⑵　【2004 大分大】 n を正の整数とする。整式 x^n を x^5-1 で割った余りを求めよ。

$x^n\div P(x)$ の商を $Q(x)$，余りを $R(x)$ とおくと，除法の原理により，$x^n=P(x)Q(x)+R(x)$ である。

⑴　問１⑴のように，$n=1, 2, \cdots$ として，余りを求めていくと 12 を周期に余りが繰り返すから（計算省略），

$$R(x)=\begin{cases} x & (n=12k-11\text{のとき}) \\ x^2 & (n=12k-10\text{ のとき}) \\ x^3 & (n=12k-9\text{ のとき}) \\ x^2-1 & (n=12k-8\text{ のとき}) \\ x^3-x & (n=12k-7\text{ のとき}) \\ -1 & (n=12k-6\text{ のとき}) \end{cases},\quad R(x)=\begin{cases} -x & (n=12k-5\text{のとき}) \\ -x^2 & (n=12k-4\text{ のとき}) \\ -x^3 & (n=12k-3\text{ のとき}) \\ -x^2+1 & (n=12k-2\text{ のとき}) \\ -x^3+x & (n=12k-1\text{ のとき}) \\ 1 & (n=12k\text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。（k は正の整数）

よって，$n=2021=12\cdot169-7$ のとき，$R(x)=x^3-x$　答

⑵　同様に，x^n を x^5-1 で割った余りを $R(x)$ とおくと，

$$R(x)=\begin{cases} x & (n=5k-4\text{ のとき}) \\ x^2 & (n=5k-3\text{ のとき}) \\ x^3 & (n=5k-2\text{ のとき}) \\ x^4 & (n=5k-1\text{ のとき}) \\ 1 & (n=5k\text{ のとき}) \end{cases}$$

（k は正の整数）　答

（2023/2/8　加筆）