問 1

$x^2P_1(x)-P_1(x)=x^4-1 \Rightarrow x^4=(x^2-1)P_1(x)+1$なので、

$$x^{2023}=(x^4)^{505}x^3=((x^2-1)P_1(x)+1)^{505}x^3=\left[\sum_{i=0}^{505}\binom{505}{505-i}\{(x^2-1)P_1(x)\}^i\right]x^3$$

$$=P_1(x)\left[\sum_{i=1}^{505}\binom{505}{505-i}(x^2-1)^iP_1(x)^{i-1}\right]x^3+x^3$$

となります。第1項は$P_1(x)$で割り切れますから、x^3を$P_1(x)$で割った余りが$R_1(x)$です。よって、

$R_1(x)=x$

です。同様の計算を(2)～(6)に施せば$R_n(x)$は求まります。しかし、詰まるところ、その計算は$P_n(x)$を法とする演算に帰着できるようです。$P_n(x)$を初項 1、公比x^rの等比数列を第 1 項～第 k 項までの和$P(k,x^r)$と考えれば、

$x^rP(k,x^r)-P(k,x^r)=x^{rk}-1 \Rightarrow x^{rk}=(x^r-1)P(k,x^r)+1 \Rightarrow x^{rk}\equiv 1 \bmod(P(k,x^r))$

と表現できます。つまり、与えられた m をrkで割った余りを a すると、

$x^m\equiv x^a \bmod(P(k,x^r))$

です。m=2023 として、上式を適用すると、下表のようになります。

問	$P_n(x)$	k	r	rk	a	$R_n(x)$
(1)	x^2+1	2	2	4	3	$x^3 \bmod(P_1(x))=-x$
(2)	x^2+x+1	3	1	3	1	$x \bmod(P_2(x))=x$
(3)	x^3+x^2+x+1	4	1	4	3	$x^3 \bmod(P_3(x))=-x^2-x-1$
(4)	x^4+x^2+1	3	2	6	1	$x \bmod(P_4(x))=x$
(5)	x^4+1	2	4	8	7	$x^7 \bmod(P_5(x))=-x^3$
(6)	$x^4+x^3+x^2+x+1$	5	1	5	3	$x^3 \bmod(P_6(x))=x^3$

問 2

問 1 の計算過程で、$R_n(x)$は m の剰余で周期的に求まることがわかります。以下の通り、表に整理しました。

n	$P_n(x)$	周期(位数)	剰余	$R_n(x)$
1	x^2+1	4	0	1
			1	x
			2	−1
			3	−x
2	x^2+x+1	3	0	1
			1	x
			2	−x−1
3	x^3+x^2+x+1	4	0	1
			1	x
			2	x^2
			3	$-x^2-x-1$
4	x^4+x^2+1	6	0	1
			1	x
			2	x^2
			3	x^3
			4	$-x^2-x-1$
			5	$-x^3-x^2-x$
5	x^4+1	8	0	1
			1	x
			2	x^2
			3	x^3
			4	−1
			5	−x
			6	$-x^2$
			7	$-x^3$
6	$x^4+x^3+x^2+x+1$	5	0	1
			1	x
			2	x^2
			3	x^3
			4	$-x^3-x^2-x-1$

上表をもとに、m を求めると、次の通りです。

(1)$R_1(x)=R_3(x)$となるのは、m(mod 4)≡0,1 を満たすとき

(2)$R_2(x)=R_4(x)$となるのは、m(mod 6)≡0,1 を満たすとき

(3)$R_3(x)=R_5(x)$となるのは、m(mod 8)≡0,1,2 を満たすとき

(4)$R_4(x)=R_6(x)$となるのは、m(mod 30)≡0,1,2,3 を満たすとき

(5)$R_1(x)=R_2(x)=R_3(x)=R_4(x)$となるのは、m(mod 12)≡0,1 を満たすとき

(6)$R_1(x)=R_2(x)=R_3(x)=R_4(x)=R_5(x)$となるのは、m(mod 24)≡0,1 を満たすとき

(7)$R_1(x)=R_2(x)=R_3(x)=R_4(x)=R_5(x)=R_6(x)$となるのは、m(mod 120)≡0,1 を満たすとき