問 1

$x^2P_1(x)-P_1(x)=x^4-1 \Rightarrow x^4=(x^2-1)P_1(x)+1$なので、

$$x^{2023}=(x^4)^{505}x^3=((x^2-1)P_1(x)+1)^{505}x^3=\left[\sum_{i=0}^{505}\binom{505}{505-i}\{(x^2-1)P_1(x)\}^i\right]x^3$$

$$=P_1(x)\left[\sum_{i=1}^{505}\binom{505}{505-i}(x^2-1)^iP_1(x)^{i-1}\right]x^3+x^3$$

となります。第1項は$P_1(x)$で割り切れますから、x^3を$P_1(x)$で割った余りが$R_1(x)$です。よって、

$R_1(x)=x$

です。同様の計算を(2)～(6)に施せば$R_n(x)$は求まります。しかし、詰まるところ、その計算は$P_n(x)$を法とする演算に帰着できるようです。$P_n(x)$を初項 1、公比x^rの等比数列を第 1 項～第 k 項までの和$P(k,x^r)$と考えれば、

$x^rP(k,x^r)-P(k,x^r)=x^{rk}-1 \Rightarrow x^{rk}=(x^r-1)P(k,x^r)+1 \Rightarrow x^{rk} \equiv 1 \mod (P(k,x^r))$

と表現できます。つまり、与えられた m をrkで割った余りを a すると、

$x^m \equiv x^a \mod (P(k,x^r))$

です。m=2023 として、上式を適用すると、下表のようになります。

問	$P_n(x)$	k	r	rk	a	$R_n(x)$
(1)	x^2+1	2	2	4	3	$x^3 \mod (P_1(x))=-x$
(2)	x^2+x+1	3	1	3	1	$x \mod (P_2(x))=x$
(3)	x^3+x^2+x+1	4	1	4	3	$x^3 \mod (P_3(x))=-x^2-x-1$
(4)	x^4+x^2+1	3	2	6	1	$x \mod (P_4(x))=x$
(5)	x^4+1	2	4	8	7	$x^7 \mod (P_5(x))=-x^3$
(6)	$x^4+x^3+x^2+x+1$	5	1	5	3	$x^3 \mod (P_6(x))=x^3$

問 2

問 1 の計算過程で、$R_n(x)$は m の剰余で周期的に求まることがわかります。以下の通り、表に整理しました。

<table>
<tr><th>n</th><th>$P_n(x)$</th><th>周期(位数)</th><th>剰余</th><th>$R_n(x)$</th></tr>
<tr><td rowspan="4">1</td><td rowspan="4">x^2+1</td><td rowspan="4">4</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>x</td></tr>
<tr><td>2</td><td>−1</td></tr>
<tr><td>3</td><td>−x</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2</td><td rowspan="3">x^2+x+1</td><td rowspan="3">3</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>x</td></tr>
<tr><td>2</td><td>−x−1</td></tr>
<tr><td rowspan="4">3</td><td rowspan="4">x^3+x^2+x+1</td><td rowspan="4">4</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>x</td></tr>
<tr><td>2</td><td>x^2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$-x^2-x-1$</td></tr>
<tr><td rowspan="6">4</td><td rowspan="6">x^4+x^2+1</td><td rowspan="6">6</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>x</td></tr>
<tr><td>2</td><td>x^2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>x^3</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$-x^2-x-1$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$-x^3-x^2-x$</td></tr>
<tr><td rowspan="8">5</td><td rowspan="8">x^4+1</td><td rowspan="8">8</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>x</td></tr>
<tr><td>2</td><td>x^2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>x^3</td></tr>
<tr><td>4</td><td>−1</td></tr>
<tr><td>5</td><td>−x</td></tr>
<tr><td>6</td><td>$-x^2$</td></tr>
<tr><td>7</td><td>$-x^3$</td></tr>
<tr><td rowspan="5">6</td><td rowspan="5">$x^4+x^3+x^2+x+1$</td><td rowspan="5">5</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>x</td></tr>
<tr><td>2</td><td>x^2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>x^3</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$-x^3-x^2-x-1$</td></tr>
</table>

上表をもとに、m を求めると、次の通りです。

(1)$R_1(x)=R_3(x)$となるのは、$m\equiv 0,1 \pmod 4$を満たすとき

(2)$R_2(x)=R_4(x)$となるのは、$m\equiv 0,1 \pmod 6$を満たすとき

(3)$R_3(x)=R_5(x)$となるのは、$m\equiv 0,1,2 \pmod 8$を満たすとき

(4)$R_4(x)=R_6(x)$となるのは、$m\equiv 0,1,2,3 \pmod{30}$を満たすとき

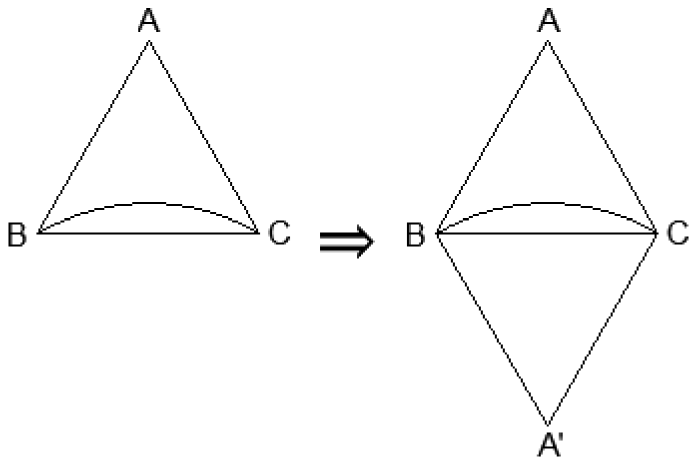
(5)$R_1(x)=R_2(x)=R_3(x)=R_4(x)$となるのは、$m\equiv 0,1 \pmod{12}$を満たすとき

(6)$R_1(x)=R_2(x)=R_3(x)=R_4(x)=R_5(x)$となるのは、$m\equiv 0,1 \pmod{24}$を満たすとき

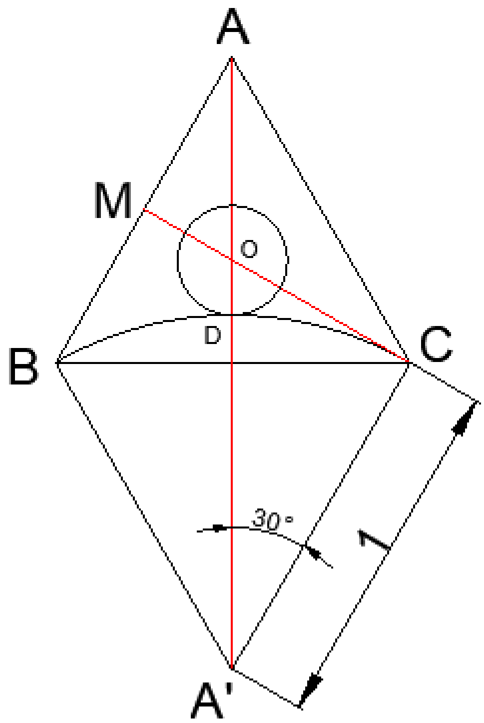
(7)$R_1(x)=R_2(x)=R_3(x)=R_4(x)=R_5(x)=R_6(x)$となるのは、$m\equiv 0,1 \pmod{120}$を満たすとき

追加問題1　2023.2.8 追記

甲は作図で描画できそうなので、やってみました。下図のように、A を辺 BC で折り返した点を A’とします。



そして、辺 AB の中点 M を取り、補助線 AA’と CM を引きます（赤線の部分です）。すると、交点 O、D ができますが、中心 O 半径 OD が甲です。

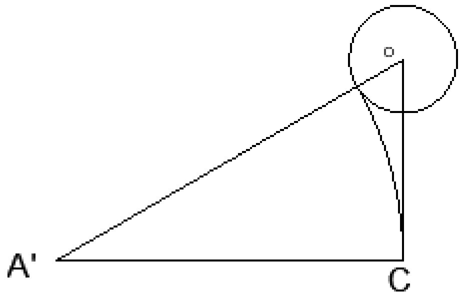


作図を参考にして、数式で半径を割り出せばよいので、甲の半径 R とすると、

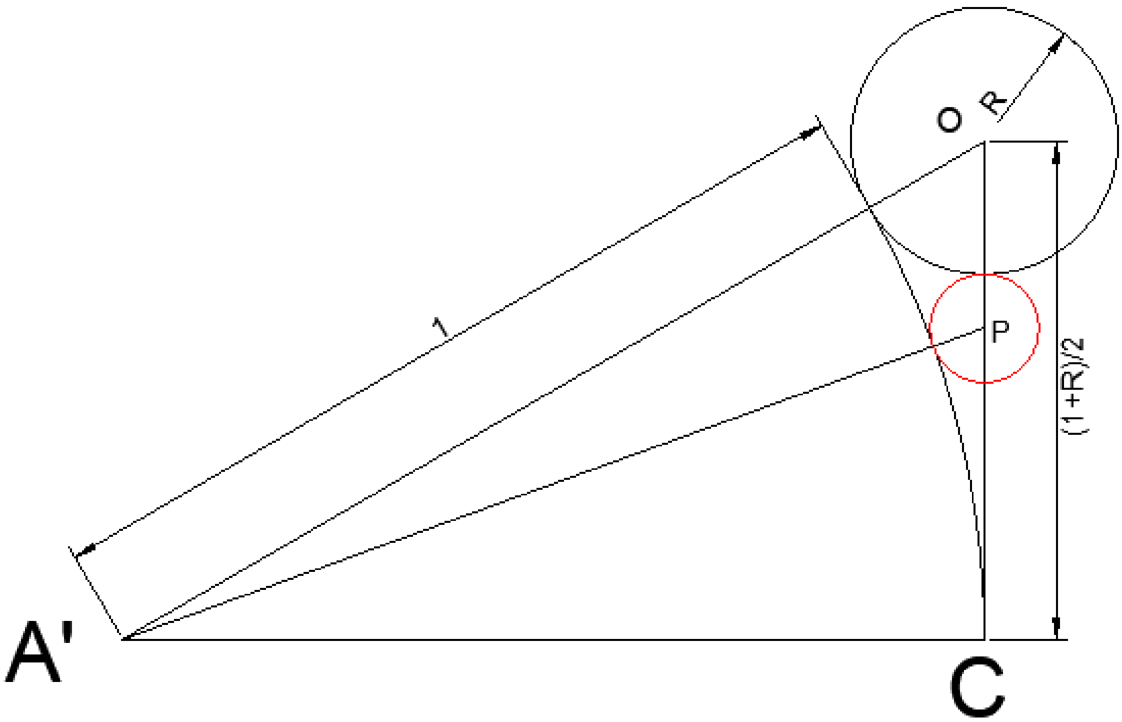
$$R=\frac{2}{\sqrt{3}}-1=\frac{2\sqrt{3}-3}{3}$$

です。

(コンパスと定規で)乙を作図する方法を見出せませんでした。仕方ないので、方程式を使い次のようにやりました。前図の△A’OC に着目して、この部分を切り取って考えます。



ここで、乙が描画できるとすれば、下図のような配置になっています(赤円部分です)。



乙の半径を r として、△A’PC に三平方の定理を適用すると、

$$1^2+\left\{\frac{1+R}{2}-(R+r)\right\}^2=(1+r)^2$$

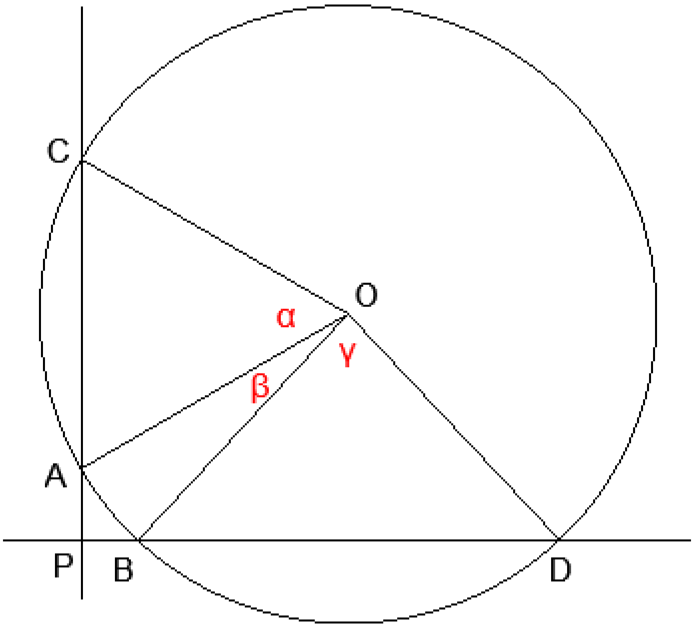
これを解いて、

$$r=\frac{9-4\sqrt{3}}{33}$$

です。以上より、甲の半径$=\frac{2\sqrt{3}-3}{3}$、乙の半径$=\frac{9-4\sqrt{3}}{33}$です。

追加問題2　2023.2.8 追記

期待された解法ではないと思いますが、良いやり方が見つからなかったので、まずは次のようにやってみました。図のように、中心角をα、β、γとします。



□OCPD の内角の和が 2π ですから、

$$\angle OCA+\angle APB+\angle BDO+\alpha+\beta+\gamma=2\pi \Rightarrow \frac{\pi-\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi-\gamma}{2}+\alpha+\beta+\gamma=2\pi$$

$$\Rightarrow \beta=\frac{\pi-(\alpha+\gamma)}{2} \cdots ①$$

です。円 O の半径 r とすると、

$$\triangle OAB\text{の面積}=\frac{r^2}{2}\sin(\beta)=\frac{r^2}{2}\sin(\beta)=\frac{r^2}{2}\sin\left(\frac{\pi-(\alpha+\gamma)}{2}\right)=\frac{r^2}{2}\cos\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)$$

また、

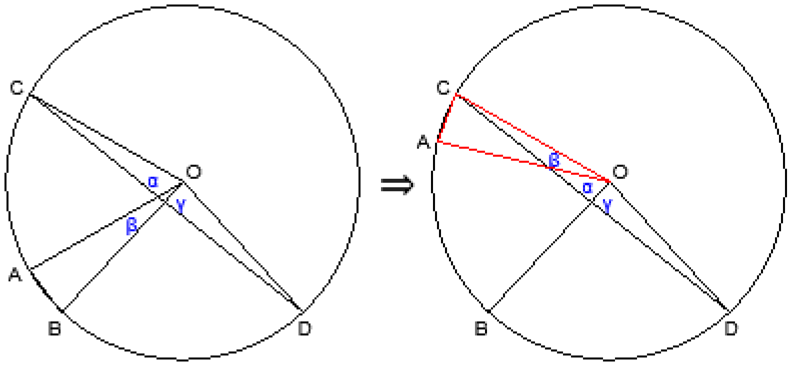
$$\triangle OCD\text{の面積}=\frac{r^2}{2}\sin(\alpha+\beta+\gamma)$$

$$=\frac{r^2}{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi-(\alpha+\gamma)}{2}+\gamma\right)=\frac{r^2}{2}\sin\left(\frac{\pi+(\alpha+\gamma)}{2}\right)=\frac{r^2}{2}\cos\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)$$

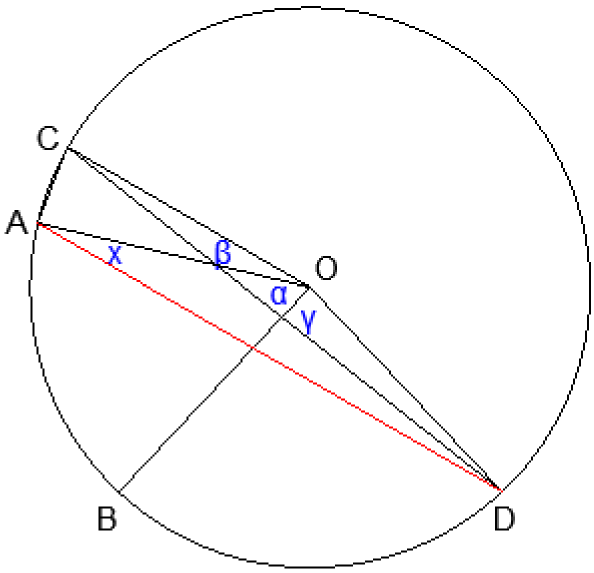
なので、△OAB の面積=△OCD の面積です。

別解

三角関数を扱うのは難しいので、個人的には小学生に受ける算数でやるのが好ましいと思います。等積変形を使って、△OAB を△OCD に移すことを考えました。下図のように、△OAB を点 O の回り回転させて、△OCA とします。



次に補助線 AD を引きます。



すると、

$$x=\angle OAD=\frac{\pi-(\alpha+\gamma)}{2}$$

です。これは①式より β に等しいことがわかります。つまり、OC // AD なので、底辺を OC として、△OCA が△OCD に移ることを意味します。よって、△OAB の面積=△OCD の面積です。