● 問題 423 解答＜三角定規＞

［問１］キチンと書くと解答が必要以上に冗長になるので, 厳密性には欠けますが, 帰納法の本体部分のみ書きました。

(1) $x^m=(x^2+1)Q_1(x)+R_1(x)$ … m の周期は 4

$x^{4k+l}=(x^2+1)Q_1(x)+R_{1l}(x)$ $(k=0,1,\cdots,\ l=0,1,2,3)$ を仮定すると

$$x^{4(k+1)+l}=x^4\cdot x^{4k+l}=x^4\{(x^2+1)Q_1(x)+R_{1l}(x)\}$$
$$=x^4(x^2+1)Q_1(x)+(x^4-1)R_{1l}(x)+R_{1l}(x)$$
$$=(x^2+1)\{x^4Q_1(x)+(x^2-1)R_{1l}(x)\}+R_{1l}(x)$$

で成立。$m=2023=505\times 4+3$ で, $k=505$, $l=3$ だから,

$x^3=(x^2+1)x-x$ $\therefore$ $R_1(x)=-\boldsymbol{x}$ …[答]

(2) $x^m=(x^2+x+1)Q_2(x)+R_2(x)$ … m の周期は 3

$x^{3k+l}=(x^2+x+1)Q_2(x)+R_{2l}(x)$ $(k=0,1,\cdots,\ l=0,1,2)$ を仮定すると

$$x^{3(k+1)+l}=x^3\cdot x^{3k+l}=x^3\{(x^2+x+1)Q_2(x)+R_{2l}(x)\}$$
$$=x^3(x^2+x+1)Q_2(x)+(x^3-1)R_{2l}(x)+R_{2l}(x)$$
$$=(x^2+x+1)\{x^3Q_2(x)+(x-1)R_{2l}(x)\}+R_{2l}(x)$$

で成立。$m=2023=674\times 3+1$ で, $k=674$, $l=1$ だから,

$x=(x^2+x+1)\cdot 0+x$ $\therefore$ $R_2(x)=\boldsymbol{x}$ …[答]

(3) $x^m=(x^3+x^2+x+1)Q_3(x)+R_3(x)$ … m の周期は 4

$x^{4k+l}=(x^3+x^2+x+1)Q_3(x)+R_{3l}(x)$ $(k=0,1,\cdots,\ l=0,1,2,3)$ を仮定すると

$$x^{4(k+1)+l}=x^4\cdot x^{4k+l}=x^4\{(x^3+x^2+x+1)Q_3(x)+R_{3l}(x)\}$$
$$=x^4(x^3+x^2+x+1)Q_3(x)+(x^4-1)R_{3l}(x)+R_{3l}(x)$$
$$=(x^3+x^2+x+1)\{x^4Q_3(x)+(x-1)R_{3l}(x)\}+R_{3l}(x)$$

で成立。$m=2023=505\times 4+3$ で, $k=505$, $l=3$ だから,

$x^3=(x^3+x^2+x+1)\cdot 1-x^2-x-1$ $\therefore$ $R_3(x)=-\boldsymbol{x^2-x-1}$ …[答]

(4) $x^m=(x^4+x^2+1)Q_4(x)+R_4(x)$ … m の周期は 6

$x^{6k+l}=(x^4+x^2+1)Q_4(x)+R_{4l}(x)$ $(k=0,1,\cdots,\ l=0,1,2,3,4,5)$ を仮定すると

$$x^{6(k+1)+l}=x^6\cdot x^{6k+l}=x^6\{(x^4+x^2+1)Q_4(x)+R_{4l}(x)\}$$
$$=x^6(x^4+x^2+1)Q_4(x)+(x^6-1)R_{4l}(x)+R_{4l}(x)$$
$$=(x^4+x^2+1)\{x^6Q_4(x)+(x^2-1)R_{4l}(x)\}+R_{4l}(x)$$

で成立。$m=2023=337\times 6+1$ で, $k=337$, $l=1$ だから,

$x=(x^4+x^2+1)\cdot 0+x$ $\therefore$ $R_4(x)=\boldsymbol{x}$ …[答]

(5) $x^m=(x^4+1)Q_5(x)+R_5(x)$ … m の周期は 8

$x^{8k+l}=(x^4+1)Q_5(x)+R_{5l}(x)$ $(k=0,1,\cdots,\ l=0,1,2,3,4,5,6,7)$ を仮定すると

$$x^{8(k+1)+l}=x^8\cdot x^{8k+l}=x^8\{(x^4+1)Q_5(x)+R_{5l}(x)\}$$
$$=x^8(x^4+1)Q_5(x)+(x^8-1)R_{5l}(x)+R_{5l}(x)$$
$$=(x^4+1)\{x^8Q_5(x)+(x^4-1)R_{5l}(x)\}+R_{5l}(x)$$

で成立。$m=2023=252\times 8+7$ で，$k=252,\ l=7$ だから，

$x^7=(x^4+1)x^3-x^3$ $\therefore$ $R_5(x)=\boldsymbol{-x^3}$ …[答]

(6) $x^m=(x^4+x^3+x^2+x+1)Q_6(x)+R_6(x)$ … m の周期は 5

$x^{5k+l}=(x^4+x^3+x^2+x+1)Q_6(x)+R_{6l}(x)$ $(k=0,1,\cdots,\ l=0,1,2,3,4)$ を仮定すると

$$x^{5(k+1)+l}=x^5\cdot x^{5k+l}=x^5\{(x^4+x^3+x^2+x+1)Q_6(x)+R_{6l}(x)\}$$
$$=x^5(x^4+x^3+x^2+x+1)Q_6(x)+(x^5-1)R_{6l}(x)+R_{6l}(x)$$
$$=(x^4+x^3+x^2+x+1)\{x^5Q_6(x)+(x-1)R_{6l}(x)\}+R_{6l}(x)$$

で成立。$m=2023=404\times 5+3$ で，$k=404,\ l=3$ だから，

$x^3=(x^4+x^3+x^2+x+1)\cdot 0+x^3$ $\therefore$ $R_6(x)=\boldsymbol{x^3}$ …[答]

[問２] [問1] のそれぞれの m の周期 T_n に対し $x^{Tk+l}=P_n(x)\cdot Q_n(x)+R_{nl}$ と書くことにすると

$n=1$ $(T_1=4)$: $R_{10}=1,\ R_{11}=x,\ R_{12}=-1,\ R_{13}=-x$

$n=2$ $(T_2=3)$: $R_{20}=1,\ R_{21}=x,\ R_{22}=-x-1$

$n=3$ $(T_3=4)$: $R_{30}=1,\ R_{31}=x,\ R_{32}=x^2,\ R_{33}=-x^2-x-1$

$n=4$ $(T_4=6)$: $R_{40}=1,\ R_{41}=x,\ R_{42}=x^2,\ R_{43}=x^3,\ R_{44}=-x^2-1,\ R_{45}=-x^3-x$

$n=5$ $(T_5=8)$: $R_{50}=1,\ R_{51}=x,\ R_{52}=x^2,\ R_{53}=x^3,\ R_{54}=-1,\ R_{55}=-x,\ R_{56}=-x^2,\ R_{57}=-x^3$

$n=6$ $(T_6=6)$: $R_{60}=1,\ R_{61}=x,\ R_{62}=x^2,\ R_{63}=x^3,\ R_{64}=-x^3-x^2-x-1$

(1) $T_1=T_3=4,\ R_{10}=R_{30}=1,\ R_{11}=R_{31}=x$ より，$m=\boldsymbol{4k},\ \boldsymbol{4k+1}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ …[答]

(2) $T_2=3,\ T_4=6,\ R_{20}=R_{40}=1,\ R_{21}=R_{41}=x$ より，$m=\boldsymbol{6k},\ \boldsymbol{6k+1}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ …[答]

(3) $T_3=4,\ T_5=8,\ R_{30}=R_{50}=1,\ R_{31}=R_{51}=x,\ R_{32}=R_{52}=x^2$ より，

$m=\boldsymbol{8k},\ \boldsymbol{8k+1},\ \boldsymbol{8k+2}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ …[答]

(4) $T_4=6,\ T_6=5,\ R_{40}=R_{60}=1,\ R_{41}=R_{61}=x,\ R_{42}=R_{62}=x^2,\ R_{43}=R_{63}=x^3$ より，

$m=\boldsymbol{30k},\ \boldsymbol{30k+1},\ \boldsymbol{30k+2},\ \boldsymbol{30k+3}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ …[答]

(5) $T_1=4,\ T_2=3,\ T_3=4,\ T_4=6$ の最小公倍数は 12

$R_{10}=R_{20}=R_{30}=R_{40}=1,\ R_{11}=R_{21}=R_{31}=R_{41}=x$ より，$m=\boldsymbol{12k},\ \boldsymbol{12k+1}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ …[答]

(6) $T_1=4,\ T_2=3,\ T_3=4,\ T_4=6,\ T_5=8$ の最小公倍数は 24

$R_{10}=R_{20}=R_{30}=R_{40}=R_{50}=1,\ R_{11}=R_{21}=R_{31}=R_{41}=R_{51}=x$ より，

$m=\boldsymbol{24k},\ \boldsymbol{24k+1}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ …[答]

(7) $T_1=4,\ T_2=3,\ T_3=4,\ T_4=6,\ T_5=8,\ T_6=5$ の最小公倍数は 120

$R_{10}=R_{20}=R_{30}=R_{40}=R_{50}=R_{60}=1,\ R_{11}=R_{21}=R_{31}=R_{41}=R_{51}=R_{61}=x$ より，

$m=\boldsymbol{120k},\ \boldsymbol{120k+1}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ …[答]