第 425 回

問題 1

$a_k=\sqrt{n+\sqrt{n+k}}$ とおく。ただし，k は自然数とする。次の問いに答えよ。

(1)　a_5，a_6，a_7 が整数となるとき，a_5，a_6，a_7 の値とそのときの n の値を求めよ。

(2)　$a_k=k$ のとき，n を k で表せ。

解答

(1)

［Ⅰ］　k が自然数，$\sqrt{n+\sqrt{n+k}}$ が非負整数ならば，n は整数であることを示す。

証明　$\sqrt{n+k}=l$（有理数）とおくと，$k=l^2-n$ は自然数である。　…①

このとき，$a_k=\sqrt{n+l}$ は非負整数だから，$a_k{}^2=n+l$ も非負整数である。　…②

①+②より，$k+a_k{}^2=l(l+1)$ は自然数である。　…③

③より，$l(l+1)$ が自然数なので，l は自然数である。

このとき，①（または②）より，n は整数である。終

［Ⅱ］　a_k（$k=5,\ 6,\ 7$）が整数となるとき，$a_k=\sqrt{n+\sqrt{n+k}}$　…④と表されるから，a_k は非負整数である。

$\therefore a_k\geqq 0$

④の両辺を 2 乗して移項すると，$a_k{}^2-n=\sqrt{n+k}$

さらに両辺を 2 乗して移項すると，$n^2-(2a_k{}^2+1)n+a_k{}^4-k=0$　…⑤

この 2 次方程式の判別式を D とおくと，n は整数（有理数）であるから，

$D=(2a_k{}^2+1)^2-4(a_k{}^4-k)=4(a_k{}^2+k)+1=d^2$（$d$ は自然数）とおける。

移項すると，$4(a_k{}^2+k)=(d-1)(d+1)$

$(d+1)-(d-1)=2$ より，$4(a_k{}^2+k)$ を差が 2 の 2 数の積にすると，

$k=5,\ 6,\ 7$ であるから，$4<a_k{}^2+k$ より，$4=d-1$，$a_k{}^2+k=d+1$ の場合に限る。

（∵）$2=d-1$，$2(a_k{}^2+k)=d+1$ や $1=d-1$，$4(a_k{}^2+k)=d+1$ のときは，2 数の差が 2 を超えてしまうから。

前式より，$d=5$　このとき後式より，$a_k{}^2=6-k$　…⑥

[1]　$k=5$ のとき，⑥より，$a_5{}^2=1$　$a_5\geqq 0$ より，$a_5=1$　⑤より，$n^2-3n-4=0$　$\therefore n=-1,\ 4$

このうち，④を満たすのは，$n=-1$

[2]　$k=6$ のとき，⑥より，$a_6{}^2=0$　$a_6\geqq 0$ より，$a_6=0$　⑤より，$n^2-n-6=0$　$\therefore n=-2,\ 3$

このうち，④を満たすのは，$n=-2$

[3]　$k=7$ のとき，⑥より，$a_7{}^2=-1$　これを満たす非負整数はない。

［Ⅲ］　次の設問(2)より，$a_k=k$ の場合を考えてみると，⑤より，$n^2-(2k^2+1)n+k(k-1)(k^2+k+1)=0$

因数分解すると，$\{n-k(k-1)\}\{n-(k^2+k+1)\}=0$　$\therefore n=k(k-1)$，k^2+k+1

このうち，④を満たすのは，$n=k(k-1)$

$k=5,\ 6,\ 7$ とすると，

$a_5=5$，そのとき，$n=5\cdot 4=20$；$a_6=6$，そのとき，$n=6\cdot 5=30$；$a_7=7$，そのとき，$n=7\cdot 6=42$

以上，［Ⅱ］，［Ⅲ］をまとめると，

a_5 が整数になるとき，$(a_5,\ n)=(1,\ -1)$，$(5,\ 20)$ 答

a_6 が整数になるとき，$(a_6,\ n)=(0,\ -2)$，$(6,\ 30)$ 答

a_7 が整数になるとき，$(a_7,\ n)=(7,\ 42)$ 答

(2) (1) の［Ⅲ］より，$n=k(k-1)$ 答

補足　$n=k(k-1)$ のとき，

$k=\sqrt{n+k}=\sqrt{n+\sqrt{n+k}}=\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+k}}}=\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+k}}}}=\cdots$ となる。

問題２

$x>0$，$y>0$ のとき，$\dfrac{7x^2+8xy+y^2}{x^2+y^2}$ の取りうる値の範囲を求めよ。

解答　$\dfrac{y}{x}=z$ （$z>0$）とおくと，与式$=\dfrac{7+8\cdot\dfrac{y}{x}=\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}=\dfrac{7+8z+z^2}{1+z^2}=f(z)$ とおく。

$f'(z)=\dfrac{(z^2+1)(2z+8)-(z^2+8z+7)\cdot 2z}{(z^2+1)^2}=-\dfrac{4(z+2)(2z-1)}{(z^2+1)^2}=0$ とおくと，$z>0$ のとき，$z=\dfrac{1}{2}$

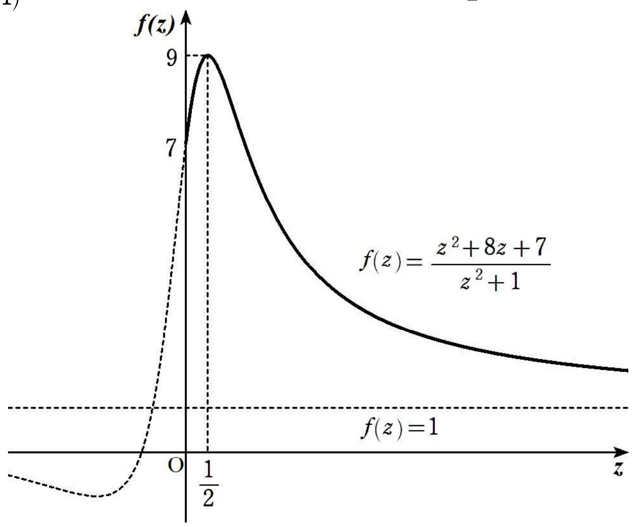
$$\lim_{z\to\infty}f(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{\dfrac{7}{z^2}+\dfrac{8}{z}+1}{\dfrac{1}{z^2}+1}=1$$

z	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	∞
$f'(z)$		$+$	0	$-$	
$f(z)$	7	↗	9	↘	1

上の増減表により，$f(z)$ の値域は，$1<f(z)\leqq 9$

等号は，$z=\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{2}$　i.e. $x=2y$ のとき。

よって，$1<\dfrac{7x^2+8xy+y^2}{x^2+y^2}\leqq 9$ 答



別解１　$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ （$r>0$，$0\leqq\theta<2\pi$）とおくと，$x>0$，$y>0$ より，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ である。

このとき，

与式$=\dfrac{7r^2\cos^2\theta+8r^2\cos\theta\sin\theta+r^2\sin^2\theta}{r^2}=1+6\cos^2\theta+8\sin\theta\cos\theta=1+6\cdot\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}+4\sin 2\theta$

$=4+4\sin 2\theta+3\cos 2\theta \ =4+5\sin(2\theta+\alpha) \ =z$ とおく。

（$\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$， $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$， $\dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{\alpha}{4}$ ）

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より， $\alpha<2\theta+\alpha<\pi+\alpha$

$2\theta+\alpha=\alpha$ のとき， $\theta=0 \quad z=4+5\cdot\dfrac{3}{5}=7$

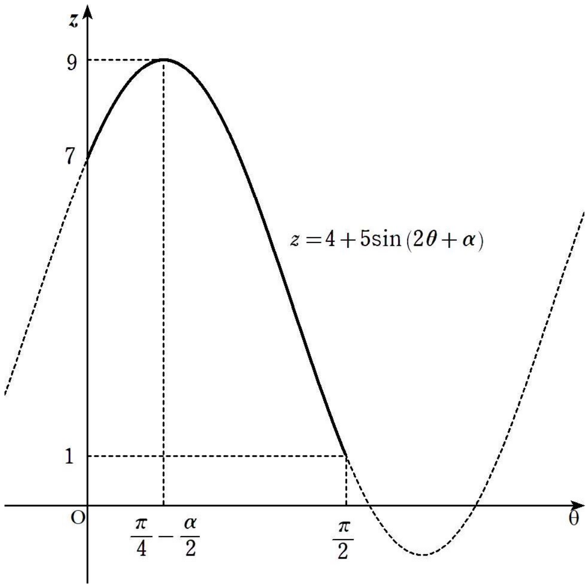
$2\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ のとき， $\theta=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2} \quad z=4+5\cdot 1=9$

$2\theta+\alpha=\pi+\alpha$ のとき， $\theta=\dfrac{\pi}{2} \quad z=4+5\left(-\dfrac{3}{5}\right)=1$

右の $z=4+5\sin(2\theta+\alpha)$ のグラフより，

z の値域は， $1<z\leqq 9$

よって， $1<\dfrac{7x^2+8xy+y^2}{x^2+y^2}\leqq 9$ 答



なお，等号は，

$$x=r\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=r\sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{2}}=r\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{2}}=r\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}r,$$

$$y=r\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=r\sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{2}}=r\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{2}}=r\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}r \text{ のとき，}$$

i.e. $x:y=2:1$ より， $x=2y$ のとき。

別解2 $\dfrac{7x^2+8xy+y^2}{x^2+y^2}=z$ とおく。

$z=1+\dfrac{6x^2+8xy}{x^2+y^2}>1$ …①である。（$\because\ x>0$， $y>0$ より， $\dfrac{6x^2+8xy}{x^2+y^2}>0$ であるから。）

また， $\dfrac{y}{x}=t$ とおくと，

$$z=1+\frac{6+8t}{1+t^2}=1+\frac{2}{\dfrac{t^2+1}{4t+3}}=1+\frac{2}{\dfrac{1}{4}t-\dfrac{3}{16}+\dfrac{\frac{25}{16}}{4t+3}}=1+\frac{32}{4t+3+\dfrac{25}{4t+3}-6}$$

ここで， $4t+3>0$， $\dfrac{25}{4t+3}>0$ より，相加平均，相乗平均の関係から，

$$\frac{(4t+3)+\dfrac{25}{4t+3}}{2}\geqq\sqrt{(4t+3)\cdot\frac{25}{4t+3}}=5$$ より， $4t+3+\dfrac{25}{4t+3}\geqq 10$ であるから， $z\leqq 1+\dfrac{32}{10-6}=9$ …②

等号は， $4t+3=\dfrac{25}{4t+3}$ のとき。$4t+3=5 \quad \therefore\ t=\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{2}$ *i.e.* $x=2y$ のとき。

よって，①，②より， $1<z\leqq 9$ であるから， $1<\dfrac{7x^2+8xy+y^2}{x^2+y^2}\leqq 9$ 答

別解3　$\dfrac{7x^2+8xy+y^2}{x^2+y^2}=k$ とおく。

$k=1+\dfrac{6x^2+8xy}{x^2+y^2}>1$　…①である。（$\because$ $x>0$，$y>0$ より，$\dfrac{6x^2+8xy}{x^2+y^2}>0$ であるから。）

また，$\dfrac{y}{x}=t$ とおくと，$\dfrac{7x^2+8xy+y^2}{x^2+y^2}=\dfrac{7+8t+t^2}{1+t^2}=k$ より，$(k-1)t^2-8t+k-7=0$　…②

①より，$k\fallingdotseq 1$ であるから，t についての2次方程式②の判別式を D とおくと，実数解をもつから，$D\geqq 0$ である。

$\dfrac{D}{4}=(-4)^2-(k-1)(k-7)=-(k+1)(k-9)\geqq 0$ より，$-1\leqq k\leqq 9$　…③

①，③より，$1<k\leqq 9$

等号は，②で $k=9$ とおくと，$2(2t-1)^2=0$ より，$t=\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{2}$ のとき，$i.e.$ $x=2y$ のとき。

よって，$\dfrac{7x^2+8xy+y^2}{x^2+y^2}$ の取りうる値の範囲は，$1<\dfrac{7x^2+8xy+y^2}{x^2+y^2}\leqq 9$　答

問題3

$x>0$，$y>0$，$z>0$ のとき，$\dfrac{xyz}{y^2z^2+x^2z+3x^2+y^2}$ の最大値を求めよ。

解答　与式 $=\dfrac{xyz}{(z+3)x^2+(z^2+1)y^2}$

ここで，$x>0$，$y>0$，$z>0$ より，相加平均≧相乗平均を適用すると，

$(z+3)x^2+(z^2+1)y^2\geqq 2\sqrt{(z+3)x^2\cdot(z^2+1)y^2}=2xy\sqrt{(z+3)(z^2+1)}$

等号は，$(z+3)x^2=(z^2+1)y^2$　…①のとき。

$\therefore$ 与式 $\leqq\dfrac{xyz}{2xy\sqrt{(z+3)(z^2+1)}}=\dfrac{1}{2\sqrt{(z+3)\left(1+\dfrac{1}{z^2}\right)}}$

ここで，$(z+3)\left(1+\dfrac{1}{z^2}\right)=f(z)$ とおき，最小値を求める。

$f'(z)=1\cdot\left(1+\dfrac{1}{z^2}\right)+(z+3)\left(-\dfrac{2}{z^3}\right)=\dfrac{(z-2)(z^2+2z+3)}{z^3}=0$ とおくと，$z=2$

右の増減表により，$z=2$ のとき，$f(z)$ の最小値は $\dfrac{25}{4}$ となるから，

z	0	$\cdots$	2	$\cdots$	∞
$f'(z)$		$-$	0	$+$	
$f(z)$	∞	↘	$\dfrac{25}{4}$	↗	∞

$\dfrac{xyz}{y^2z^2+x^2z+3x^2+y^2}$ の最大値は，$\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{25}{4}}}=\dfrac{1}{5}$

等号は，$z=2$ のとき，①より，$(2+3)x^2=(2^2+1)y^2$　$x>0$，$y>0$ より，$x=y$のとき 。

よって，最大値は，$\dfrac{1}{5}$（$x=y$，$z=2$ のとき）　答

(2023/4/10　ジョーカー)