問題1

$a_k$を平方根の中に入れる操作を考えます。

$$a_k = \sqrt{a_k{}^2} = \sqrt{a_k{}^2 - a_k + a_k} = \sqrt{a_k{}^2 - a_k + \sqrt{a_k{}^2}}$$

与式と見比べると、

$a_k{}^2 - a_k = n$・・・①

$n + k = a_k{}^2$・・・②

$k > 0$のもとで、n、$a_k$について解くと

$a_k = k, n = k(k-1)$

です。よって、以下のようになります。

(1) $a_5 = 5, n = 5(5-1) = 20$

$a_6 = 6, n = 6(6-1) = 30$

$a_7 = 7, n = 7(7-1) = 42$

(2) $a_k = k$のとき$n = k(k-1)$

問題2

想定解ではないでしょうけど、安易な方法でアプローチしました。極座標系を使うと楽に解けると思います。

$x = r\cos(\theta)$

$y = r\sin(\theta)$

とします。ただし、x$> 0, y > 0$なので$r > 0$、$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$です。すると、r が消えて、変数の数が1つになります。

$$与式 = \frac{r^2\sin(\theta)^2 + 8r^2\cos(\theta)\sin(\theta) + 7r^2\cos(\theta)^2}{r^2\sin(\theta)^2 + r^2\cos(\theta)^2} = 4\sin(2\theta) + 3\cos(2\theta) + 4$$

$$= 5\sin(2\theta + \alpha) + 4$$

ここで、$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$なので、$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$です。すると、$\sin(2\theta + \alpha)$の最大値は 1、下に有界ですが最小値は存在しません(限りなく$-\frac{3}{5}$に近づきます)。よって、与式の取りうる範囲は区間(1,9]です。

別解

よく考えてみたら、極座標を持ち出さなくとも、分子・分母を$x^2$または$y^2$で割れば、見掛け上、変数の数が減ります。これが想定解でしょうか。例えば、分子・分母を$x^2$で割って、

$$与式=\frac{7+8\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

と変形します。$\frac{y}{x}=t$とやると、

$$与式=\frac{t^2+8t+7}{t^2+1}=1+\frac{8t+6}{t^2+1}$$

となり、扱いやすくなります。

$$k=\frac{8t+6}{t^2+1}$$

とすると、$t\to\infty$のときに、$k\to 0$(下限)なので、上限について考察すればよいです。上式を$t$について整理すると、

$$kt^2-8t+k-6=0$$

ですが、$t$は実数の範囲を動くので、上式の判別式$D\geq 0$でなければなりません。つまり、

$$D=(-4)^2-k(k-6)\geq 0\Rightarrow -2\leq k\leq 8$$

ですから、$k$の最大値は 8 です。よって、与式の取りうる範囲は区間(1,9]です。

問題3

与式の分子・分母を入れ替えて、最小値を求める問題に読み替えて取り組みました。

$$f(x,y,z)=\frac{y^2+z^2y^2+zx^2+3x^2}{zyx}=\frac{yz}{x}+\frac{y}{xz}+\frac{3x}{yz}+\frac{x}{y}=4\cdot\frac{yz}{4x}+\frac{y}{xz}+3\cdot\frac{x}{yz}+2\frac{x}{2y}$$

上式に相加・相乗平均の関係を適用すると、

$$f(x,y,z)\geq 10\left(\left(\frac{yz}{4x}\right)^4\cdot\frac{y}{xz}\cdot\left(\frac{x}{yz}\right)^3\cdot\left(\frac{x}{2y}\right)^2\right)^{\frac{1}{10}}=10\left(\frac{1}{2^{10}}\right)^{\frac{1}{10}}=5$$

となりますから、$f(x,y,z)$は最小値 5 の可能性があります。また、

$$f(x,y,z)=\frac{y}{x}\left(z+\frac{1}{z}\right)+\frac{x}{y}\left(\frac{3}{z}+1\right)\geq 2\sqrt{\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{3}{z}+1\right)}$$

とも変形できますから、試みに上式$=5$とすると、

$$2\sqrt{\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{3}{z}+1\right)}=5\Rightarrow 2^2\left(\frac{3}{z}+1\right)\left(z+\frac{1}{z}\right)=5^2\Rightarrow z=-\frac{3}{4},2$$

$z>0$なので、$z=2$が得られます。そして、$f(x,y,2)=5$とやってみると、

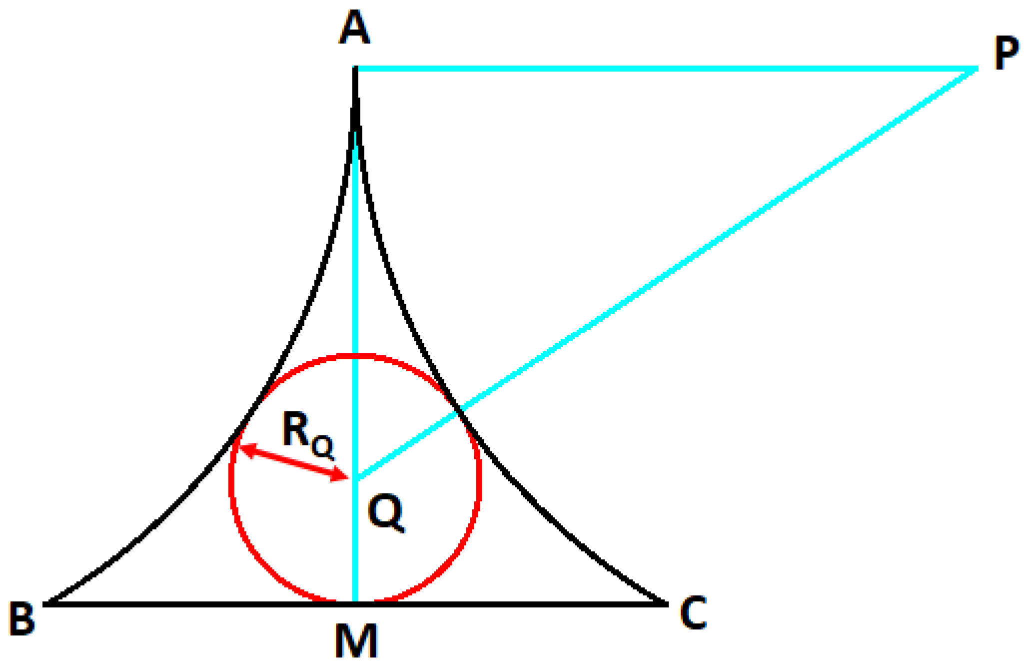
$$f(x,y,2)=5\Rightarrow\frac{y^2+2^2y^2+2x^2+3x^2}{2yx}=5\Rightarrow 5(x-y)^2=0$$

$x=y$のときに成り立つことがわかります。よって、$x=y,z=2$のときに、$f(x,y,z)$の最小値 5 です。

読み替え前の問題文で言うと、$x=y,z=2$のときに、最大値$\frac{1}{5}$となります。

問題4
作図では解けなさそうだったので、手掛かりになる三角形を見つけて、辺の長さの関係を方程式で表現する方法でやりました。

・甲の半径について
下図のように点をとって補助線を入れます。点 Q は甲の中心、点 P は弧 AC の中心、点 M は線分 BC の中点です。そして、△APQ に着目します。



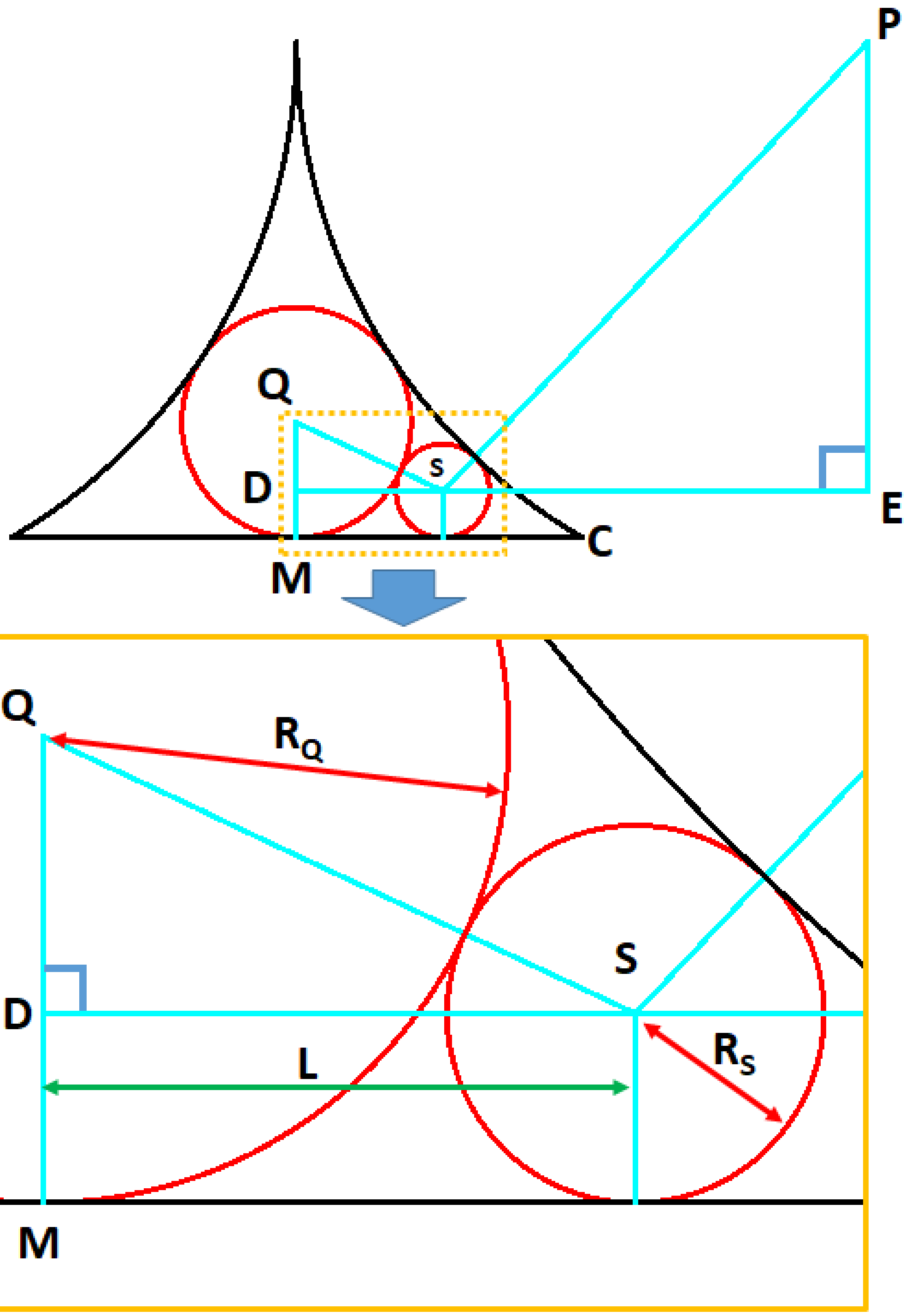

$\mathrm{AM}=\frac{\sqrt{3}}{2}$なので、甲の半径を$\mathbf{R_Q}$として、△APQ に三平方の定理を適用すると、

$$\mathrm{AP}^2+\mathrm{AQ}^2=\mathrm{PQ}^2 \Rightarrow 1^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\mathbf{R_Q}\right)^2=\left(1+\mathbf{R_Q}\right)^2$$

です。これを解いて、$\mathbf{R_Q}=\frac{3(2-\sqrt{3})}{4}$となります。よって、甲の半径は、$\frac{3(2-\sqrt{3})}{4}$です。

・乙の半径について

上図に乙と必要な補助線を書き足します。図が小さいの拡大しておきます。点 S は乙の中心、$\mathbf{R_S}$は それの半径です。点 S から線分 QM に下した点を D、点 P から直線 DS に下した点を E とします。方程式を立てる都合で、線分 DS の長さを L としておきます。着目する三角形は△QDS と△PES です。



△QDS、△PES に三平方の定理を適用すると、

$$QD^2+DS^2=QS^2$$

$$\Rightarrow\left(\mathbf{R_Q}-\mathbf{R_s}\right)^2+L^2=\left(\mathbf{R_Q}+\mathbf{R_s}\right)^2\Rightarrow\left(\frac{3(2-\sqrt{3})}{4}-\mathbf{R_s}\right)^2+L^2=\left(\frac{3(2-\sqrt{3})}{4}+\mathbf{R_s}\right)^2\cdots①$$

$$SE^2+PE^2=PS^2\Rightarrow(1-L)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\mathbf{R_s}\right)^2=(1+\mathbf{R_s})^2\cdots②$$

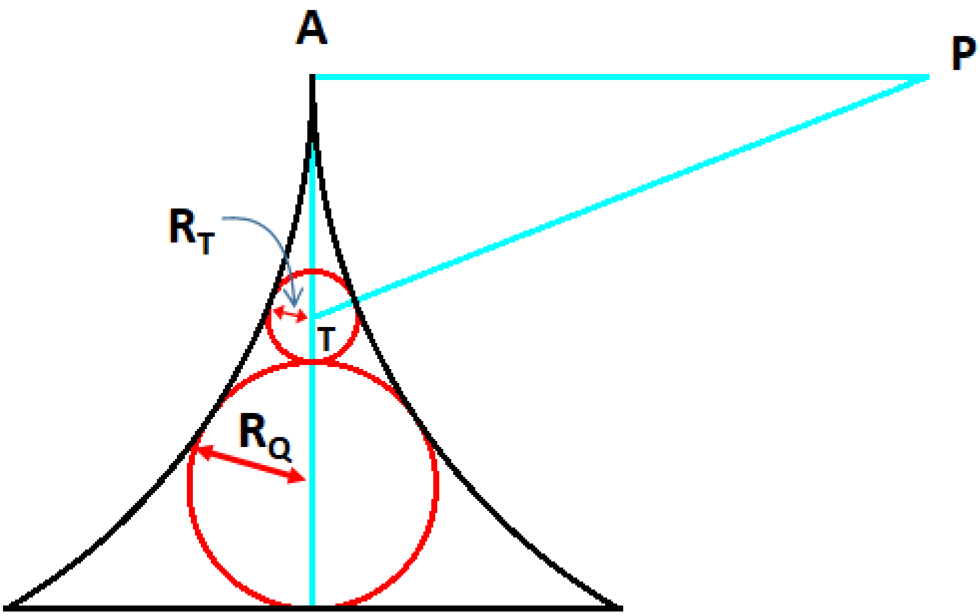
これらを解くと、

$$\mathbf{R_s}=\frac{3(3-\sqrt{3}(\sqrt{2}-1)-\sqrt{2})}{32}、L=\frac{3(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{8}$$

となります。よって、乙の半径は、$\frac{3(3-\sqrt{3}(\sqrt{2}-1)-\sqrt{2})}{32}$です。

・丙の半径について

下図のように点をとって補助線を入れます。点 T は丙の中心、$\mathbf{R_T}$はその半径です。△APT に着目します。




三平方の定理を適用すると、

$$AP^2+AT^2=PT^2$$

$$\Rightarrow 1^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-2\mathbf{R_Q}-\mathbf{R_T}\right)^2=(1+\mathbf{R_T})^2\Rightarrow 1^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-2\frac{3(2-\sqrt{3})}{4}-\mathbf{R_T}\right)^2=(1+\mathbf{R_T})^2$$

です。これを解いて、$\mathbf{R_T}=\frac{3(3\sqrt{3}-5)}{8}$です。よって、丙の半径は、$\frac{3(3\sqrt{3}-5)}{8}$です。