● 問題 425 解答＜三角定規＞

［問題１］

(1) $a_k=\sqrt{n+\sqrt{n+k}}$ …①

$a_5=\sqrt{n+\sqrt{n+5}}$ …②

題意より $\sqrt{n+5}$ が整数であることが必要だから，$=m$ (整数) と置き $n+5=m^2$

②$=\sqrt{m^2-5+m}=N$ (整数) と置き $m^2+m-(N^2+5)=0$ …③

③の解 m が整数のとき，③の判別式は平方数になるから $1+4(N^2+5)=l^2$ (l: 整数)

$\therefore\ (l+2N)(l-2N)=21=7\cdot3$

$l+2N>l-2N$ より $(l+2N,\ l-2N)=(21,\ 1),\ (7,\ 3)$ $\therefore\ (l,\ N)=(11,\ 5),\ (5,\ 1)$

$N=5$ のとき③に戻して $m^2+m-30=(m+6)(m-5)=0$ $\therefore\ m=5,\ n=20$

$N=1$ のとき③に戻して $m^2+m-6=(m+3)(m-2)=0$ $\therefore\ m=2,\ n=-1$, これは不適。

以上より，$a_5=\mathbf{5},\ n=\mathbf{20}$ …[答]

$a_6=\sqrt{n+\sqrt{n+6}}$ …④

題意より $\sqrt{n+6}$ が整数であることが必要だから，$=m$ (整数) と置き $n+6=m^2$

④$=\sqrt{m^2-6+m}=N$ (整数) と置き $m^2+m-(N^2+6)=0$ …⑤

⑤の解 m が整数のとき，⑤の判別式は平方数になるから $1+4(N^2+6)=l^2$ (l: 整数)

$\therefore\ (l+2N)(l-2N)=25=5^2$

$l+2N>l-2N$ より $(l+2N)(l-2N)=(25,\ 1)$ $\therefore\ (l,\ N)=(13,\ 6)$

⑤に戻して $m^2+m-42=(m+7)(m-6)=0$ $\therefore\ m=6,\ n=30$

以上より，$a_6=\mathbf{6},\ n=\mathbf{30}$ …[答]

$a_7=\sqrt{n+\sqrt{n+7}}$ …⑥

題意より $\sqrt{n+7}$ が整数であることが必要だから，$=m$ (整数) と置き $n+7=m^2$

⑥$=\sqrt{m^2-7+m}=N$ (整数) と置き $m^2+m-(N^2+7)=0$ …⑦

⑦の解 m が整数のとき，⑦の判別式は平方数になるから $1+4(N^2+7)=l^2$ (l: 整数)

$\therefore\ (l+2N)(l-2N)=29$

$l+2N>l-2N$ より $(l+2N)(l-2N)=(29,\ 1)$ $\therefore\ (l,\ N)=(15,\ 7)$

⑦に戻して $m^2+m-56=(m+8)(m-7)=0$ $\therefore\ m=7,\ n=42$

以上より，$a_7=\mathbf{7},\ n=\mathbf{42}$ …[答]

(2) $a_k=\sqrt{n+\sqrt{n+k}}=k$ …⑧

平方と移項を繰り返し ⑧ $\Leftrightarrow$ $n^2-(2k^2+1)n+k^4-k=0$ …⑨

⑨を解いて $n=k^2+k+1,\ k^2-k$ …⑩

⑩をそれぞれ⑧に戻すと前者は不適だから $n=\boldsymbol{k^2-k}$ …[答]

［問題２］

$x>0$ より　$k=\dfrac{7x^2+8xy+y^2}{x^2+y^2}=\dfrac{(y/x)^2+8(y/x)+7}{(y/x)^2+1}$　…①

$y/x=t$ と置くと，$x>0,\ y>0$ のとき　$0<t<\infty$　で

$k=\dfrac{t^2+8t+7}{t^2+1}$　…②

$\therefore\ (k-1)t^2-8t+k-7=0$　…③

まず，③が実数解をもつ $\Leftrightarrow$ $D/4=16-(k-1)(k-7)=-(k+1)(k-9)\geqq 0$　$\therefore\ -1\leqq k\leqq 9$ …④

③が正の解をもつ t の範囲を求める。

・ $\dfrac{4}{k-1}>0$ のとき③はつねに正の解をもつ。$\therefore\ k>1$ …⑤

・ $\dfrac{4}{k-1}<0$ のときは $k-7<0$ で，正の解をもつことはない。

以上より，①の取り得る値の範囲は　$\mathbf{1}<\dfrac{x^2+8xy+7y^2}{x^2+y^2}\leqq\mathbf{9}$　…[答]

［問題３］

$x>0,\ y>0,\ z>0,\ k=\dfrac{xyz}{y^2z^2+x^2z+3x^2+y^2}$　…①

①の分母$=(z+3)x^2+(z^2+1)y^2\geqq 2\sqrt{(z+3)(z^2+1}\,xy$　だから

$k\leqq\dfrac{z}{2\sqrt{(z+3)(z^2+1)}}$　$\therefore\ 4k^2\leqq\dfrac{z^2}{(z+3)(z^2+1)}$　…②

$f(z)=\dfrac{z^2}{(z+3)(z^2+1)}$　と置くと，　$f\,'(z)=-\dfrac{z(z-2)(z^2+2z+3)}{(z+3)^2(z^2+1)^2}$

$f\,'(2)=0,\ z<2$ で $f\,'(z)>0,\ 2<z$ で $f\,'(z)<0$ だから，$z>0$ のとき $f(z)\leqq f(2)=\dfrac{4}{25}$　…③

③を②に戻し，$k^2\leqq\dfrac{1}{25}$　$\therefore\ k\leqq\dfrac{1}{5}$

以上より，求める最大値は $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}$　…[答]