第 426 回

問題 1

(1)　2023^{2023} を 19 で割った余りを求めよ。

(2)　2023^{2023} を 323 で割った余りを求めよ。

(3)　$18^{2023}+20^{2023}$ を 361 で割った余りを求めよ。

解答

(1)　$2023=19\cdot106+9$ より，二項定理を利用して，

$2023^{2023}=(19\cdot106+9)^{2023}=(19\cdot106)^{2023}+{}_{2023}C_1(19\cdot106)^{2022}\cdot9+\cdots+{}_{2023}C_{2022}(19\cdot106)\cdot9^{2022}+9^{2023}$

$=19N+9^{2023}$，　（$N=106(19\cdot106)^{2022}+{}_{2023}C_1\cdot106(19\cdot106)^{2021}\cdot9+\cdots+{}_{2023}C_{2022}\cdot106\cdot9^{2022}$ は正の整数）

従って，2023^{2023} を 19 で割った余りは，9^{2023} を 19 で割った余りに等しい。

次に，9^n（$n=1,\ 2,\ \cdots$）を 19 で割った余りを順次計算すると，

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
9^nを19で割った余り	9	5	7	6	16	11	4	17	1	9	$\cdots$

上の表により，9^n を 19 で割った余りは，周期 9 で繰り返すから，

$2023=9\cdot224+7$ より，5^{2023} を 19 で割った余りは，4

よって，2023^{2023} を 19 で割った余りは，4　答

(2)　二項定理を利用して，

$2023^{2023}=(17\cdot119)^{2023}=17^{2023}\cdot119^{2023}=17\cdot17^{2022}\cdot(19\cdot6+5)^{2023}$

$=17\cdot17^{2022}\cdot(19M+5^{2023})$，　（$M=6(19\cdot6)^{2022}+{}_{2023}C_1\cdot6(19\cdot6)^{2021}\cdot9+\cdots+{}_{2023}C_{2022}\cdot6\cdot9^{2022}$ は正の整数）

$=\bigstar$

17^n（$n=1,\ 2,\ \cdots$）を 19 で割った余りを順次計算すると，

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
17^nを19で割った余り	17	4	11	16	6	7	5	9	1	17	$\cdots$

17^n を 19 で割った余りは，周期 9 で繰り返すから，

$2022=9\cdot224+6$ より，$17^{2022}=19L+7$（L は正の整数）となる。

同様に，5^n（$n=1,\ 2,\ \cdots$）を 19 で割った余りを順次計算すると，

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
5^nを19で割った余り	5	6	11	17	9	7	16	4	1	5	$\cdots$

5^n を 19 で割った余りも，周期 9 で繰り返すから，

$2023=9\cdot224+7$ より，$5^{2023}=19N+16$（N は正の整数）となる。

従って，

$\bigstar=17(19L+7)\{19M+(19N+16)\}=17\cdot19\{19L(M+N)+16L+7(M+N)\}+17\cdot7\cdot16$

$=323\{19L(M+N)+66L+7(M+N)\}+1904=323\{19L(M+N)+66L+7(M+N)\}+323\cdot5+289$

$=323\{19L(M+N)+66L+7(M+N)+5\}+289$ より，

2023^{2023} を 323 で割った余りは、289　答

(3)　$361=19^2$ である。二項定理により，

$$18^{2023}+20^{2023}=(19-1)^{2023}+(19+1)^{2023}=2\left(19^{2023}+{}_{2023}C_2 19^{2021}+\cdots+{}_{2023}C_{2020}19^3+{}_{2023}C_{2022}19^1\right)$$

$$=19\left(2\cdot 19^{2022}+2{}_{2023}C_2 19^{2020}+\cdots+2{}_{2023}C_{2020}19^2+2\cdot 2023\right)=19(19N+4046)$$

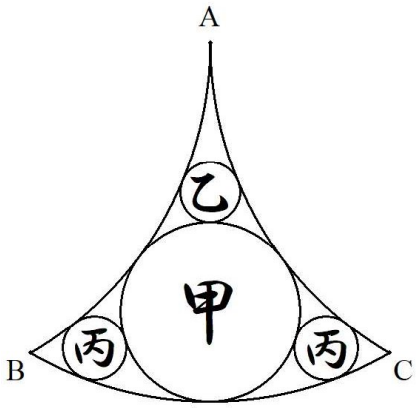
$(N=2\cdot 19^{2022}+2{}_{2023}C_2\cdot 19^{2020}+\cdots+2{}_{2023}C_{2020}\cdot 19^2$ は正の整数$)$

$$=19(19N+19\cdot 216+18)=19^2(N+216)+19\cdot 18=361(N+216)+342$$

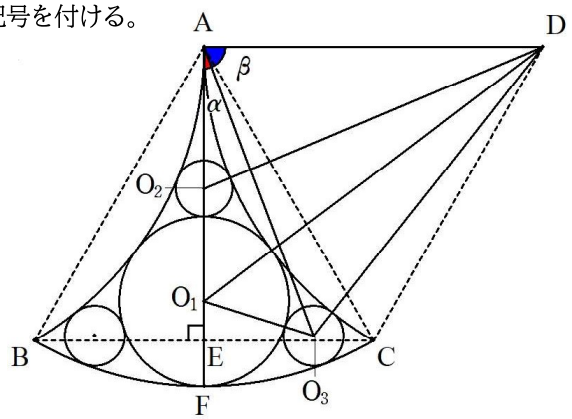
よって，$18^{2023}+20^{2023}$ を 361 で割った余りは，342　答

追加問題 1

A，B，C は 1 辺の長さが 1 の正三角形の頂点で，
弧 BC，CA，AB は半径 1 の円弧である。
図のようにこの図形の中に，互いに接する甲乙丙円
を配置する。
甲乙丙円の半径をそれぞれ求めよ。



解答　甲乙丙円を $O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$，$O_3(r_3)$ とおき，図のように記号を付ける。



$\triangle O_1DA$ に三平方の定理を適用すると，

$1^2+(1-r_1)^2=(1+r_1)^2$　$\therefore r_1=\dfrac{1}{4}$

$\triangle O_2DA$ に三平方の定理を適用すると，

$1^2+(1-2r_1-r_2)^2=(1+r_2)^2$

$r_1=\dfrac{1}{4}$ であるから，$1^2+\left(\dfrac{1}{2}-r_2\right)^2=(1+r_2)^2$　$\therefore r_2=\dfrac{1}{12}$

$\angle O_1AO_3=\alpha$，$\angle O_3AD=\beta$ とおくと，$\alpha+\beta=90^\circ$

余弦定理により，

$$\cos\alpha=\frac{(1-r_1)^2+(1-r_3)^2-(r_1+r_3)^2}{2(1-r_1)(1-r_3)}=\frac{1-r_1-r_3-r_1r_3}{(1-r_1)(1-r_3)}=\frac{3-5r_3}{3(1-r_3)}\quad\left(\because r_1=\frac{1}{4}\right)$$

$$\cos\beta=\frac{1^2+(1-r_3)^2-(1+r_3)^2}{2\cdot 1\cdot(1-r_3)}=\frac{1-4r_3}{2(1-r_3)}=\sin\alpha$$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ より，$\left\{\dfrac{1-4r_3}{2(1-r_3)}\right\}^2+\left\{\dfrac{3-5r_3}{3(1-r_3)}\right\}^2-1=0$

分母を払って整理すると，$208{r_3}^2-120r_3+9=0$　$r_3=\dfrac{3(5\pm 2\sqrt{3})}{52}$

$r_3<r_1=\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{15}{52}>\dfrac{1}{4}$ より，$r_3=\dfrac{3(5-2\sqrt{3})}{52}$（≒ 0.0886095）

よって，各円の半径は，甲：$\dfrac{1}{4}$，乙：$\dfrac{1}{12}$，丙：$\dfrac{3(5-2\sqrt{3})}{52}$　答

追加問題2

(1)　$f(x,\ y)=\sqrt{x^2+4y^2}+\sqrt{x^2-6x+34}+\sqrt{4y^2-28y+53}$ の最小値とそのときの $x,\ y$ の値を求めよ。

解答　変形すると，$f(x,\ y)=\sqrt{(x-3)^2+5^2}+\sqrt{x^2+(2y)^2}+\sqrt{2^2+(2y-7)^2}$

A$(3,\ -5)$，B$(-2,\ 7)$，P$(x,\ 0)$，Q$(0,\ 2y)$ とおくと，

$f(x,\ y)=$AP+PQ+QB≧AB である。

等号は，直線 AB と x 軸，y 軸との交点が P，Q になるときである。

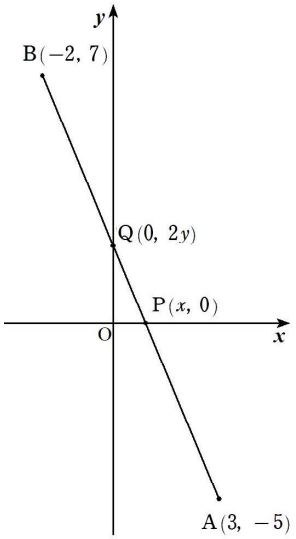
$f(x,\ y)$ の最小値は，AB$=\sqrt{(-2-3)^2+(7+5)^2}=13$

直線 AB の方程式は，$y+5=\dfrac{12}{-5}(x-3)$　…①

①で $y=0$ とおくと，$x=\dfrac{11}{12}$　$\therefore$P$\left(\dfrac{11}{12},\ 0\right)$ より，$x=\dfrac{11}{12}$

①で $x=0$ とおくと，$y=\dfrac{11}{5}$　$\therefore$Q$\left(0,\ \dfrac{11}{5}\right)$ より，$2y=\dfrac{11}{5}$ とおくと，$y=\dfrac{11}{10}$

よって，最小値13（$x=\dfrac{11}{12}$，$y=\dfrac{11}{10}$ のとき）　答



(2)　$f(x,\ y,\ z)=\sqrt{x^2-4x+5}+\sqrt{(x-y)^2+9}+\sqrt{(y-z)^2+1}+\sqrt{z^2-16z+73}$

の最小値とそのときの $x,\ y,\ z$ の値を求めよ。

解答　$f(x,\ y,\ z)=\sqrt{(x-2)^2+1^2}+\sqrt{(x-y)^2+3^2}+\sqrt{(y-z)^2+1^2}+\sqrt{(z-8)^2+3^2}$ である。

一般化して，

$f(x,\ y,\ z)=\sqrt{(x-a)^2+b^2}+\sqrt{(x-y)^2+c^2}+\sqrt{(y-z)^2+b^2}+\sqrt{(z-d)^2+c^2}$　（$a,\ b,\ c\ \ d$ は正の数）を考える。

直方体 ABCD−EFGH を空間座標に置いて考える。

Eを原点に，EF，EH，EAをそれぞれ x 軸，y 軸，z 軸の正の部分に置く。（右図）

[1]　$a<d$ のとき

E$(0,\ 0,\ 0)$，F$(b,\ 0,\ 0)$，H$(0,\ c,\ 0)$，A$(0,\ 0,\ d)$

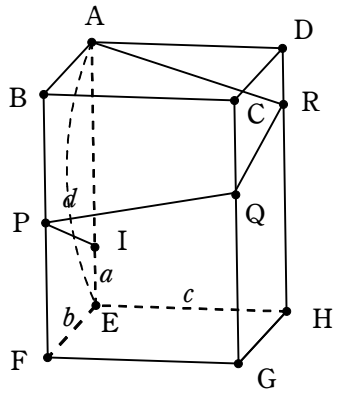
AE 上に定点 I$(0,\ 0,\ a)$ をとる。

BF 上に動点 P$(b,\ 0,\ x)$，

CG 上に動点 Q$(b,\ c,\ y)$，

DH 上に動点 R$(0,\ c,\ z)$ をとる。

このとき，



IP+PQ+QR+RA$=\sqrt{(x-a)^2+b^2}+\sqrt{(x-y)^2+c^2}+\sqrt{(y-z)^2+b^2}+\sqrt{(z-d)^2+c^2}=f(x,\ y,\ z)$

となる。

次の直方体の側面の展開図（右図）で，直線 IA′と，BF，CG，DH の交点をそれぞれ P，Q，R としたとき，

IP＋PQ＋QR＋RA≧IA′（最小）

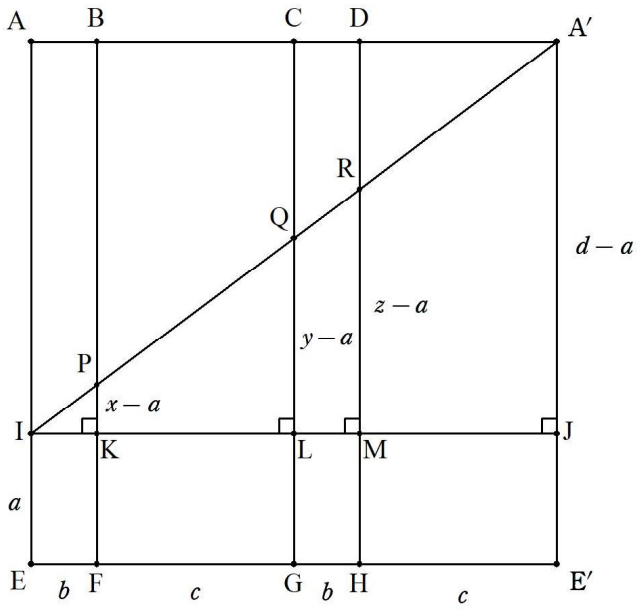
I から A′E′ に下した垂線の足を J とすると，

△A′IJ において，A′J＝$d-a$，IJ＝$2b+2c$ であるから，

三平方の定理により，

IA′＝$\sqrt{(d-a)^2+(2b+2c)^2}$

　＝$\sqrt{(a-d)^2+4(b+c)^2}$ （最小値）



IJ と PF，QG，RH の交点をそれぞれ K，L，M とする。

△PIK∽△QIL∽△RIM∽△A′IJ より，

$b:(x-a)=(b+c):(y-a)=(2b+c):(z-a)$

$=(2b+2c):(d-a)$ であるから，

$x-a=\dfrac{b(d-a)}{2b+2c}$，　$y-a=\dfrac{(b+c)(d-a)}{2b+2c}$，

$z-a=\dfrac{(2b+c)(d-a)}{2b+2c}$

$\therefore x=\dfrac{ab+2ac+bd}{2(b+c)}$，　$y=\dfrac{a+d}{2}$，　$z=\dfrac{ac+2bd+cd}{2(b+c)}$

よって，最小値 $\sqrt{(a-d)^2+4(b+c)^2}$ （$x=\dfrac{b(a+d)+2ac}{2(b+c)}$，　$y=\dfrac{a+d}{2}$，　$z=\dfrac{c(a+d)+2bd}{2(b+c)}$ のとき）

[2]　$a=d$ のとき，

[1]の結果で，$a=d$ とおけばよい。

最小値 $2(b+c)$ （$x=y=z=a$ のとき）

[3]　$a>d$ のとき

[1]で，A$(0,\ 0,\ a)$，I$(0,\ 0,\ d)$ とおけばよい。結果も a と d を入れ換えればよい。

よって，最小値 $\sqrt{(a-d)^2+4(b+c)^2}$ （$x=\dfrac{b(a+d)+2cd}{2(b+c)}$，　$y=\dfrac{a+d}{2}$，　$z=\dfrac{c(a+d)+2ab}{2(b+c)}$ のとき）

さて，本題に戻すと，$a=2$，$b=1$，$c=3$，$d=8$ のとき，[1] の場合であるから，

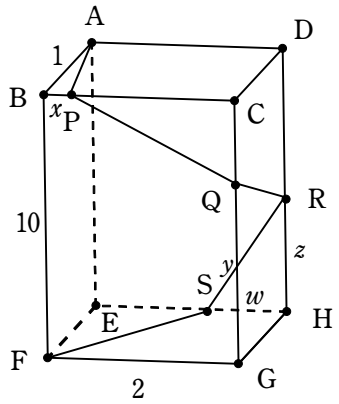
$f(x,\ y,\ z)$ の最小値は，$\sqrt{(a-d)^2+4(b+c)^2}=\sqrt{(2-8)^2+4(1+3)^2}=10$　答

（$x=\dfrac{b(a+d)+2ac}{2(b+c)}=\dfrac{1(2+8)+2\cdot2\cdot3}{2(1+3)}=\dfrac{11}{4}$，　$y=\dfrac{a+d}{2}=\dfrac{2+8}{2}=5$，

$z=\dfrac{c(a+d)+2bd}{2(b+c)}=\dfrac{3(2+8)+2\cdot1\cdot8}{2(1+3)}=\dfrac{23}{4}$ のとき）

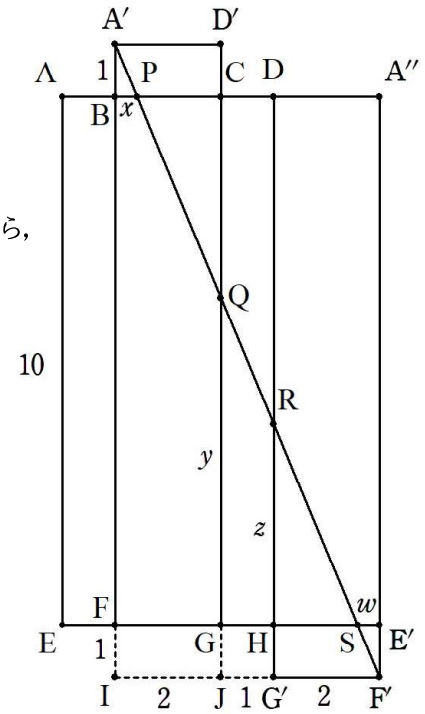
(3)　$f(x,\ y,\ z,\ w)=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(x-2)^2+(y-10)^2}+\sqrt{(y-z)^2+1}+\sqrt{z^2+(w-2)^2}+\sqrt{w^2+1}$
の最小値とそのときの $x,\ y,\ z,\ w$ の値を求めよ。

解答　直方体 ABCD−EFGH を空間座標に置いて考える。



Eを原点に，EF，EH，EAをそれぞれ x 軸，y 軸，z 軸の正の部分に置く。（右図）
A$(0,\ 0,\ 10)$，F$(1,\ 0,\ 0)$ とおき，BC 上の動点を，P$(1,\ x,\ 10)$，
CG 上の動点を，Q$(1,\ 2,\ y)$，DH 上の動点を，R$(0,\ 2,\ z)$，
EH 上の動点を，S$(0,\ w,\ 0)$ とおくと，
AP$=\sqrt{1^2+x^2}=\sqrt{x^2+1}$，PQ$=\sqrt{(2-x)^2+(y-10)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-10)^2}$，
QR$=\sqrt{(-1)^2+(z-y)^2}=\sqrt{(y-z)^2+1}$，
RS$=\sqrt{(w-2)^2+(-z)^2}=\sqrt{z^2+(w-2)^2}$，
SF$=\sqrt{1^2+(-w)^2}=\sqrt{w^2+1}$ であるから，

$f(x,\ y,\ z,\ w)=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(x-2)^2+(y-10)^2}+\sqrt{(y-z)^2+1}+\sqrt{z^2+(w-2)^2}+\sqrt{w^2+1}$
$=$ AP+PQ+QR+RS+SF　…①となる。



次に，直方体の展開図をつくり（右図），図のように記号を付けると，
A′F′ と BC，CG，DH，HE の交点をそれぞれ P，Q，R，S としたとき，
①は，$f(x,\ y,\ z,\ w)=$AP+PQ+QR+RS+SF$\geqq$A′F′ となり，最小となる。
A′F と F′G′ の交点を I，Q から IF′ に下した垂線の足を J とする。
△A′IF′ は直角三角形で，A′I$=1+10+1=12$，IF′$=2+1+2=5$ であるから，
三平方の定理により，A′F′$=\sqrt{12^2+5^2}=13$（最小値）
最後に，このときの $x,\ y,\ z,\ w$ の値を求める。

△A′BP∽△A′IF′ より，$1:x=12:5$　$\therefore x=\dfrac{5}{12}$

△QJF′∽△A′IF′ より，$(y+1):3=12:5$　$\therefore y=\dfrac{31}{5}$

△RG′F′∽△A′IF′ より，$(z+1):2=12:5$　$\therefore z=\dfrac{19}{5}$

△F′E′S≡△A′BP より，$w=x=\dfrac{5}{12}$

よって，

$f(x,\ y,\ z,\ w)$ の最小値 13（$x=\dfrac{5}{12}$，$y=\dfrac{31}{5}$，$z=\dfrac{19}{5}$，$w=\dfrac{5}{12}$ のとき）　答

(2023/4/30　ジョーカー)