問題1

⑴$2023^{2023} = (106 \times 19 + 9)^{2023} \equiv 9^{2023} (\mathrm{mod} 19)$なので、9のべき乗を調べれば良いです。フェルマーの小定理を使っても計算量があまり減りそうにないので、地道に計算すると、

$9^1 \quad 9(\mathrm{mod}19)$

$9^2 \quad 9 \times 9^1 = 81 \equiv 5(\mathrm{mod}19)$

$9^3 \quad 9 \times 9^2 = 45 \equiv 7(\mathrm{mod}19)$

$9^4 \quad 9 \times 9^3 = 63 \equiv 6(\mathrm{mod}19)$

$9^5 \quad 9 \times 9^4 = 54 \equiv 16(\mathrm{mod}19)$

$9^6 \quad 9 \times 9^5 = 144 \equiv 11(\mathrm{mod}19)$

$9^7 \quad 9 \times 9^6 = 99 \equiv 4(\mathrm{mod}19)$

$9^8 \quad 9 \times 9^7 = 36 \equiv 17(\mathrm{mod}19)$

$9^9 \quad 9 \times 9^8 = 153 \equiv 1(\mathrm{mod}19)$

となり、位数が 9 であることがわかります。よって、

$$9^{2023} = 9^{224 \times 9 + 7} = (9^9)^{224} \times 9^7 \equiv 9^7 \equiv 4(\mathrm{mod}19)$$

です。よって、2023^{2023}を19で割った余りは4です。

⑵2023は17の倍数で、323は17×19と素因数に分解できるので、次の連立方程式を解けば、323を法として2023^{2023}に合同な値を求めることができます。

$$\begin{cases} x \equiv 0(\mathrm{mod}17) \cdots ① \\ x \equiv 4(\mathrm{mod}19) \cdots ② \end{cases}$$

これらより、

$19x \equiv 0(\mathrm{mod}17) \Rightarrow x \equiv 17(\mathrm{mod}17)$

$17x \equiv 4(\mathrm{mod}19) \Rightarrow x \equiv 17(\mathrm{mod}19)$

なので、

$$19 \times 17 + 17 \times 17 = 612 \equiv 289(\mathrm{mod}323)$$

です。よって、2023^{2023}を323で割った余りは289です。

⑶361は19^2と素因数分解できることに着目して、$18 = 19 - 1, 20 = 19 + 1$とやって、二項定理を適用すればすんなり解けると思います。

$$18^{2023} + 20^{2023} = (19-1)^{2023} + (19+1)^{2023}$$

$$= \sum_{i=0}^{2023} \binom{2023}{i} 19^{2023-i} \cdot (-1)^i + \sum_{i=0}^{2023} \binom{2023}{i} 19^{2023-i} \cdot 1^i$$

ここで、$i \geq 2$のとき$19^i \equiv 0(\mathrm{mod}361)$なので、

$$\text{上式} \equiv \binom{2023}{2022} 19^1 \cdot (-1)^{2022} + \binom{2023}{2023} 19^0 \cdot (-1)^{2023}$$

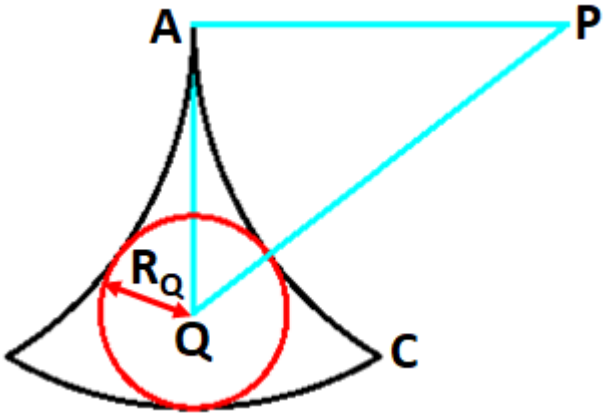
$$+ \binom{2023}{2022} 19^1 \cdot 1^{2022} + \binom{2023}{2023} 19^0 \cdot 1^{2023} (\mathrm{mod}361)$$

$$= 2023 \cdot 19 - 1 + 2023 \cdot 19 + 1 = 76874 \equiv 342(\mathrm{mod}361)$$

です。よって、$18^{2023} + 20^{2023}$を361で割った余りは342です。

問題2

・甲の半径について



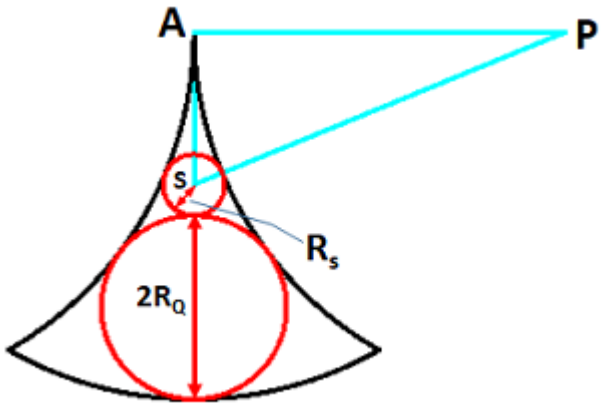
左図のように点をとって補助線を入れます。点 Q は甲の中心、点 P は弧 AC の中心です。そして、△APQ に着目します。

甲の半径 R_Q をとして、△APQ に三平方の定理を適用すると、

$$1^2 + (1 - R_Q)^2 = (1 + R_Q)^2$$

です。これを解いて、$R_Q = \frac{1}{4}$となります。よって、甲の半径 $= \frac{1}{4}$です。

・乙の半径について



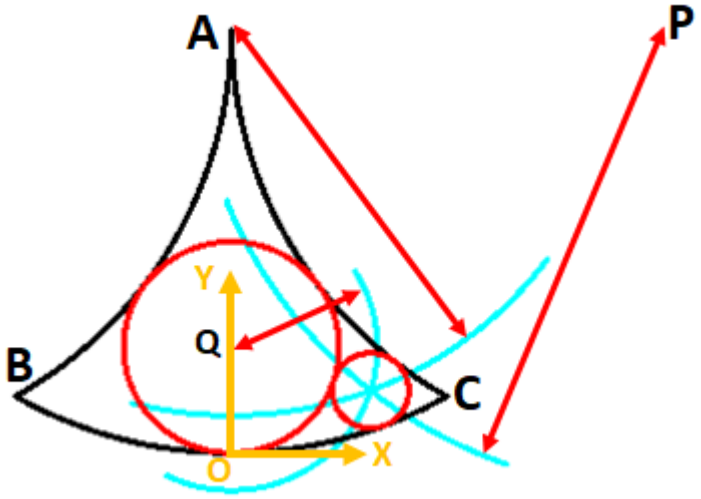
左図のように点をとって補助線を入れます。点 S は乙の中心です。そして、△APS に着目します。

乙の半径 R_S をとして、△APS に三平方の定理を適用すると、

$$1^2 + \left(1 - R_S - 2\frac{1}{4}\right)^2 = (1 + R_S)^2$$

です。これを解いて、$R_S = \frac{1}{12}$となります。よって、乙の半径 $= \frac{1}{12}$です。

・丙の半径について



もっとマシなやり方があると思いますが、思いつきませんでした。
仕方ないので、答えを出すことに重きを置いてやりました。
左図のように、弧 BC と円 Q の接点 O にオレンジ色の座標系を導入します。すると、丙の半径R_Tとしたとき、その中心は、次の円の交点です。

・中心$A(0,1)$、半径$1-R_T$
・中心$P(1,1)$、半径$1+R_T$
・中心$Q\left(0,\frac{1}{4}\right)$、半径$\frac{1}{4}+R_T$

丙の中心$Q(x,y)$とすると、

$$x^2+(y-1)^2=(1-R_T)^2 \cdots ①$$
$$(x-1)^2+(y-1)^2=(1+R_T)^2 \cdots ②$$
$$x^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=\left(\frac{1}{4}+R_T\right)^2 \cdots ③$$

これらを解くと、

$$(x,y,R_T)=\left(\frac{3\sqrt{3}-1}{13},\frac{5(5-2\sqrt{3})}{52},\frac{3(5-2\sqrt{3})}{52}\right)\left(-\frac{3\sqrt{3}+1}{13},\frac{5(5+2\sqrt{3})}{52},\frac{3(5+2\sqrt{3})}{52}\right)$$

$x>0$なので、後者は不適です。よって、丙の半径$=\frac{3(5-2\sqrt{3})}{52}$です。

追加問題

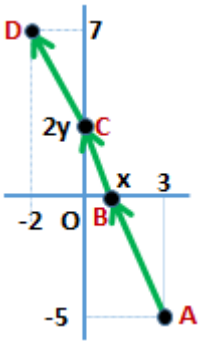
第 424 回でやったように数式を線分の長さと捉え、平面幾何に帰着してアプローチしました。

(1)与式を 2 点間の長さの和と見立てて、次のように変形すると、

$$与式 = \sqrt{x^2 + (2y)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + 5^2} + \sqrt{(2y-7)^2 + 2^2}$$

$$= \sqrt{(x-3)^2 + \left(0-(-5)\right)^2} + \sqrt{(0-x)^2 + (2y-0)^2} + \sqrt{\left((-2)-0\right)^2 + 7 - 2y^2}$$

なので、経路$A(3,-5) \to B(x,0) \to C(0,2y) \to D(-2,7)$と辿ったときの長さと考えることができます。



経路を図示すると、左図のようになります。これが最小になるのは、定点 A と B を直線で結んだときです。直線 AB は、

$$Y - (-5) = \frac{7-(-5)}{(-2)-3}(X-3) \Rightarrow Y = -\frac{12}{5}X + \frac{11}{5}$$

で、x 切片$\frac{11}{12}$、y 切片$\frac{11}{5}$となので、$x = \frac{11}{12}$、$y = \frac{11}{10}$です。一方、線分 AB の長さは、

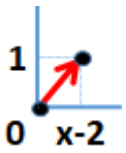
$$\sqrt{(-2-3)^2 + (7-(-5))^2} = 13$$

です。

以上より、$x = \frac{11}{12}$、$y = \frac{11}{10}$で最小値13をとります。

(2)こちらも同様にやれば良いのですが、少し工夫が要ります。まずは、平方根の中を平方完成しておきます。

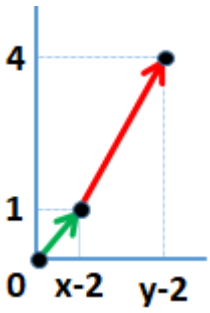
$$与式 = \sqrt{(x-2)^2 + 1^2} + \sqrt{(x-y)^2 + 3^2} + \sqrt{(y-z)^2 + 1^2} + \sqrt{(z-8)^2 + 3^2}$$



第 1 項目の線分は、

$$(0,0) \to (x-2,1)$$

と考えます。



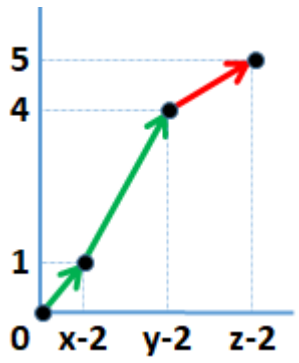
第 2 項目の線分は、

$$(x,0) \to (y,3)$$

ですが、大きさを変えなければ移動させて構わないので、第 1 項目の線分の終点に繋げます。つまり、

$$(x-2,1) \to (y-2,4)$$

とします。



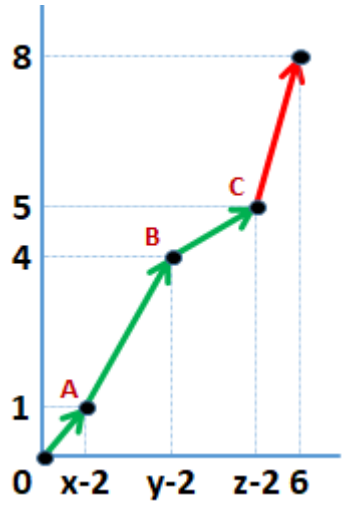
第 3 項目の線分は、

$(y, 0) \to (z, 1)$

ですが、第 2 項目の線分の終点に繋げて、

$(y-2, 4) \to (z-2, 5)$

とします。



第 4 項目の線分は、

$(z, 0) \to (8, 3)$

ですが、第 3 項目の線分の終点に繋げて、

$(z-2, 5) \to (6, 8)$

とします。

以上の操作で、定点(0,0)と(6,8)が一連の線分で結ばれました。これが最も短くなるのは、各点 A、B、C が一直線上にあるときですが、直線の傾きは$\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$なので、

$$\frac{1}{x-2} = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \frac{11}{4}$$

$$\frac{4}{y-2} = \frac{4}{3} \Rightarrow y = 5$$

$$\frac{5}{z-2} = \frac{4}{3} \Rightarrow z = \frac{23}{4}$$

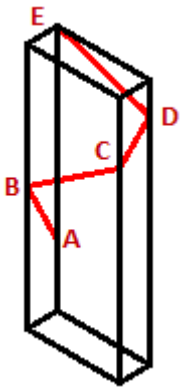
です。一方、線分の長さは、

$$\sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

です。以上より、$x = \frac{11}{4}$、$y = 5$、$y = \frac{23}{4}$で最小値10をとります。

別解 2023/05/14 追記

水野様より、ヒントを教えてもらい、直方体の側面の展開図でアプローチしてみました。



以下の通り、各項に線分を対応させます。

第 1 項 $A(0,0,2) \to B(1,0,x)$

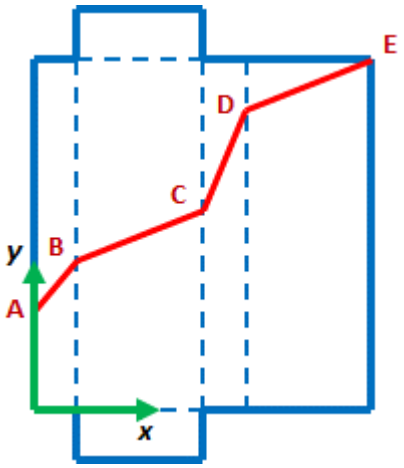
第 2 項 $B(1,0,x) \to C(1,3,y)$

第 3 項 $C(1,3,y) \to D(0,3,z)$

第 4 項 $D(0,3,z) \to E(0,0,8)$

すると、右図のように直方体を一周する連結した線分になります。

点 A、E は固定なので、点 B、C、D を調整して、この線分が最も小さくなるようにすればよいのです。線分は直方体の面上にありますから、展開図で考えるとわかり易いです。



展開図に緑矢印の座標系を導入します。すると、経路 A→B→C→D→E が最小になるのは、定点 A と E を直線で結んだときなので、直線 AE の方程式は、

$$Y = \frac{8-2}{1+3+1+3}X + 2 \Rightarrow Y = \frac{3}{4}X + 2$$

です。そして、点 B、C、D がこの直線上にあるので、x、y、z は以下の通りです。

$$x = \frac{3}{4} \cdot 1 + 2 \Rightarrow x = \frac{11}{4}$$

$$y = \frac{3}{4} \cdot (1+3) + 2 \Rightarrow y = 5$$

$$y = \frac{3}{4} \cdot (1+3+1) + 2 \Rightarrow z = \frac{23}{4}$$

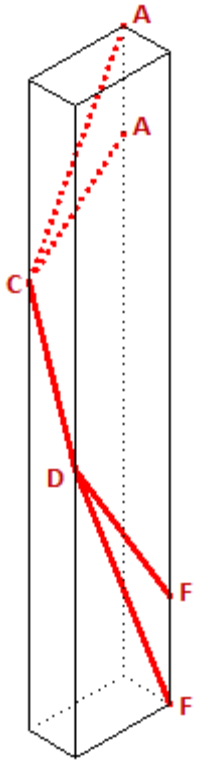
また、線分 AE の長さは、

$$\sqrt{(1+3+1+3)^2 + (8-2)^2} = 10$$

です。以上より、$x = \frac{11}{4}$、$y = 5$、$y = \frac{23}{4}$で最小値10をとります。

(3)前問と同じようにやればよいですが、そのままですと、線分を繋げ難いので、与式を次のように組合せました。

与式 = (第 1 項と第 2 項) + 第 3 項 + (第 4 項と第 5 項)



次に、直方体の表面に線分を割り当てていきます。

・第 1 項と第 2 項について

$A(0,0,9) \to B(x,0,10) \to C(2,0,y)$ または

$A(0,0,11) \to B(x,0,10) \to C(2,0,y)$

の 2 通りが考えられますが、次の線分への繋ぎ目は$(2,0,y)$です。

・第 3 項について

$C(2,0,y) \to D(2,1,z)$

です。

・第 4 項、第 5 項について

$D(2,1,z) \to E(w,1,0) \to F(0,1,1)$ または

$D(2,1,z) \to E(w,1,0) \to F(0,1,-1)$

の 2 通りが考えられます。

始点と終点が固定されていないので、以下のルートが考えられます。

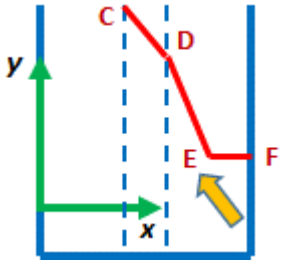
①$A(0,0,9) \to \cdots \to F(0,1,1)$

②$A(0,0,11) \to \cdots \to F(0,1,1)$

③$A(0,0,9) \to \cdots \to F(0,1,-1)$

④$A(0,0,11) \to \cdots \to F(0,1,-1)$

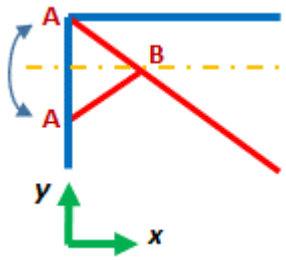
これらの経路が有効かを側面図(線分のある面だけ)で確かめます。



経路③④について

経路$E(w,1,0) \to F(0,1,1)$に着目します。

オレンジ色の矢印の点 E の x 座標は固定されていませんから、左右に動きます。もし A と F を最短経路で結んだとすると、E と F が一致します。これは不都合です。

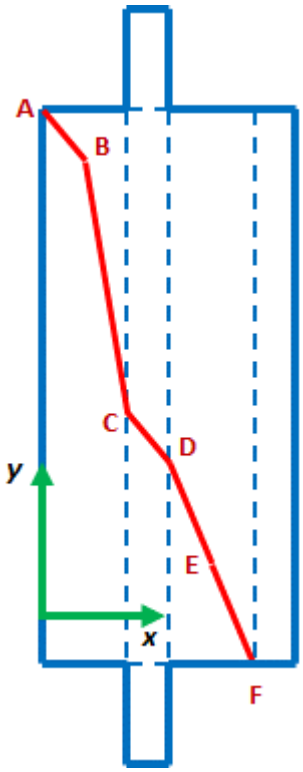


経路①②について

点 B の z 座標は 10 なので、点 A はオレンジ色の一点鎖線に対して線対称です。互いに移ることができるので、どちらでやっても、結果は同じです。

以上より、下記の経路を調べればよいことがわかります。

$A(0,0,11) \to B(x,0,10) \to C(2,0,y) \to D(2,1,z) \to E(w,1,0) \to F(0,1,-1)$



経路が最小になるのは、定点 A と F を直線で結んだときなので、直線 AF の方程式は、

$$Y = \frac{-1-11}{2+1+2}X + 11 \Rightarrow Y = -\frac{12}{5}X + 11$$

です。点 B、C、D、E この直線上にあるので、以下の通りです。

$$10 = -\frac{12}{5}X + 11 \Rightarrow x = \frac{5}{12}$$

$$y = -\frac{12}{5}\cdot 2 + 11 \Rightarrow y = \frac{31}{5}$$

$$z = -\frac{12}{5}\cdot (2+1) + 11 \Rightarrow z = \frac{19}{5}$$

$$0 = -\frac{12}{5}\cdot (2+1+2-w) + 11 \Rightarrow z = \frac{5}{12}$$

また、線分 AF の長さは、

$$\sqrt{(1+2+1)^2 + \left(11-(-1)\right)^2} = 13$$

です。

以上より、$x = \frac{5}{12}$、$y = \frac{31}{5}$、$y = \frac{19}{5}$、$z = \frac{5}{12}$で最小値13をとります。