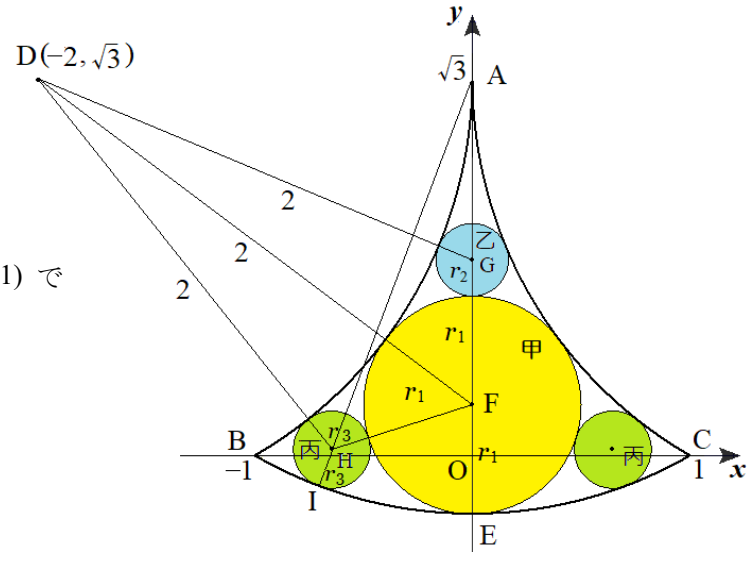
● 問題 426 解答＜三角定規＞

［追加問題１］

計算の便宜上 △ ABC を一辺 2 とし, 図のように座標軸, 各点, 座標を定める。D は円弧 AB の中心, F, G, H は甲, 乙, 丙円の中心である。



甲円の半径を r_1 とすると E(0, $\sqrt{3}-2$), F(0, $r_1+\sqrt{3}-2$) で, DF$=2+r_1$ だから

$\mathrm{DF}^2=2^2+(r_1-2)^2=(2+r_1)^2$ …①

①を整理して解いて $r_1=\dfrac{1}{2}$ …②

乙円の半径を r_2 とすると G(0, $r_2+\sqrt{3}-1$) で DG$=2+r_2$ だから

$\mathrm{DG}^2=2^2+(r_2-1)^2=(2+r_2)^2$ …③

③を整理して解いて $r_2=\dfrac{1}{6}$ …④

丙円の中心を H(a, b), 半径を r_3 とすると

$\mathrm{F}\left(0,\ \sqrt{3}-\dfrac{3}{2}\right)$, $\mathrm{HF}=r_3+r_1=r_3+\dfrac{1}{2}$ だから

$\mathrm{HF}^2=a^2+\left(b-\sqrt{3}+\dfrac{3}{2}\right)^2=\left(r_3+\dfrac{1}{2}\right)^2$ …⑤

AH$=$AI$-r_3$ だから $\mathrm{AH}^2=a^2+(\sqrt{3}-b)^2=(2-r_3)^2$ …⑥

DH$=2+r_3$ だから $\mathrm{DH}^2=(a+2)^2+(\sqrt{3}-b)^2=(2+r_3)^2$ …⑦

⑤−⑥ を整理して $b-\sqrt{3}=\dfrac{5r_3}{3}-2$ …⑧

⑥−⑦ を整理して $a=2r_3-1$ …⑨

⑧⑨を⑥に戻して整理すると $52r_3^2-60r_3+9=0$

これを解いて $r_3=\dfrac{15\pm 6\sqrt{3}}{26}$

複号の＋は $r_3>1$ となり 不適だから $r_3=\dfrac{15-6\sqrt{3}}{26}$ …⑩

以上は AB$=2$ として計算したものだから，求める 3 円の半径は

甲: $r_1=\mathbf{\dfrac{1}{4}}$, 乙: $r_2=\mathbf{\dfrac{1}{12}}$, 丙: $r_3=\mathbf{\dfrac{15-6\sqrt{3}}{52}}$ …[答]