第 427 回

問題1

次の等式が正しいのは何進法のときか求めなさい。

(1)　$0.13=\dfrac{1}{4}$

(2)　$0.2222\cdots=\dfrac{1}{3}$

(3)　$0.37373737\cdots=\dfrac{1}{3}$

(4)　$0.123123123\cdots=\dfrac{3}{13}$

(5)　$0.0131313\cdots=\dfrac{1}{30}$

補題　$n>max(a_1,\ a_2,\cdots,\ a_m)$ とする。また，$(0.abcabcabc\cdots)_n=(0.\dot{a}b\dot{c})_n$ と表す。

[1]　n 進法の有限小数を 10 進数に直す

$$(0.a_1a_2\cdots a_m)_n=\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n^2}+\cdots+\frac{a_m}{n^3}=\frac{a_1n^{m-1}+a_2n^{m-2}+\cdots a_m}{n^m}$$

[2]　n 進法の循環小数を 10 進数に直す

$(0.\dot{a}_1a_2\cdots\dot{a}_m)_n=x$ とおく。

両辺に，n^m を掛けると，$(a_1a_2\cdots a_m.\dot{a}_1a_2\cdots\dot{a}_m)_n=n^mx$

後式から前式を引くと，$(a_1a_2\cdots a_m)_n=(n^m-1)x$　　$\therefore\ x=\dfrac{(a_1a_2\cdots a_m)_n}{n^m-1}=\dfrac{a_1n^{m-1}+a_2n^{m-2}+\cdots a_m}{n^m-1}$

以上により，

$$\boxed{(0.a_1a_2\cdots a_m)_n=\frac{a_1n^{m-1}+a_2n^{m-2}+\cdots a_m}{n^m}\ ,\quad (0.\dot{a}_1a_2\cdots\dot{a}_m)_n=\frac{a_1n^{m-1}+a_2n^{m-2}+\cdots a_m}{n^m-1}}$$

解答　等式の両辺が n 進数であるから，それぞれ 10 進数に直して考える。

(1)　$n>4$ である。補題より，$(0.13)_n=\dfrac{n+3}{n^2}=\dfrac{1}{4}$ より，$n^2-4n-12=0$　　$(n-6)(n+2)=0$　　$\therefore\ n=6$

よって，6 進法　答

(2)　$n>3$ である。補題より，$(0.2222\cdots)_n=\dfrac{2}{n-1}=\dfrac{1}{3}$ より，$n=7$　　よって，7 進法　答

(3)　$n>7$ である。補題より，$(0.37373737\cdots)_n=\dfrac{3n+7}{n^2-1}=\dfrac{1}{3}$ より，$n^2-9n-22=0$　　$(n-11)(n+2)=0$

$\therefore n=11$　　よって，11 進法　答

(4)　$n>3$ である。補題より，左辺$=\dfrac{n^2+2n+3}{n^3-1}$，右辺$=\dfrac{3}{n+3}$ より，

$\dfrac{n^2+2n+3}{n^3-1}=\dfrac{3}{n+3}$　　$2n^3-5n^2-9n-12=0$　　$(n-4)(2n^2+3n+3)=0$　　$\therefore n=4$　　よって，4 進法　答

(5)　$n>3$ である。$(0.0131313\cdots)_n=\dfrac{1}{n}\times(0.131313\cdots)_n$ であるから，補題より，

左辺$=\dfrac{1}{n}\times\dfrac{n+3}{n^2-1}$，右辺$=\dfrac{1}{3n}$ より，$\dfrac{1}{n}\times\dfrac{n+3}{n^2-1}=\dfrac{1}{3n}$　$n^2-3n-10=0$　$(n-5)(n+2)=0$　$\therefore n=5$

よって，5進法　答

補足　循環節が4の場合の例をいくつか示す。

(1)　$(0.123212321232\cdots)_n=\left(\dfrac{4}{23}\right)_n$ のとき，$n>4$ である。

$\dfrac{n^3+2n^2+3n+2}{n^4-1}=\dfrac{4}{2n+3}$ より，$(n-5)(n+1)(2n^2+n+2)=0$　$\therefore n=5$

(2)　$(0.122112211221\cdots)_n=\left(\dfrac{13}{101}\right)_n$ のとき，$n>3$ である。

$\dfrac{n^3+2n^2+2n+1}{n^4-1}=\dfrac{n+3}{n^2+3}$ より，$(n-4)(n+1)(n^2+1)=0$　$\therefore n=4$

(3)　$(0.133113311331\cdots)_n=\left(\dfrac{14}{101}\right)_n$ のとき，$n>4$ である。

$\dfrac{n^3+3n^2+3n+1}{n^4-1}=\dfrac{n+4}{n^2+1}$ より，$(n-5)(n+1)(n^2+1)=0$　$\therefore n=5$

(2023/5/28　ジョーカー)