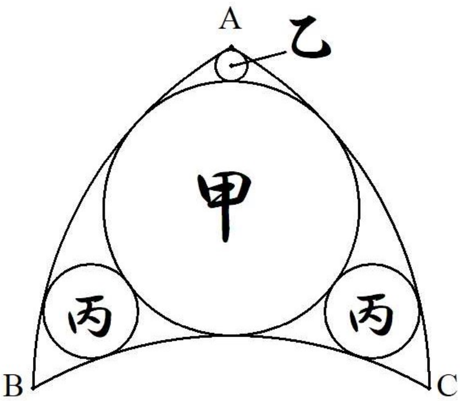
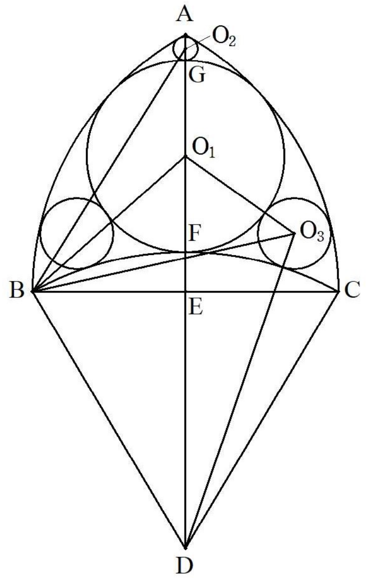
第427回追加問題

追加問題１

A，B，Cは１辺の長さが１の正三角形の頂点で，
弧 BC，CA，AB は半径１の円弧である。
図のようにこの図形の中に，互いに接する甲乙丙円を配置する。
甲乙丙円の半径をそれぞれ求めよ。



解答　甲乙丙円を $O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$，$O_3(r_3)$ とおき，図のように記号を付ける。



$\mathrm{FE}=\mathrm{FD}-\mathrm{ED}=1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから，$\triangle \mathrm{O_1BE}$ に三平方の定理を適用して，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}+r_1\right)^2=(1-r_1)^2 \quad \therefore r_1=\frac{-1+3\sqrt{3}}{13} \quad (\fallingdotseq 0.3227809)$$

$\triangle \mathrm{O_2BE}$ に三平方の定理を適用して，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+2r_1+r_2\right)^2=(1-r_2)^2$

$$r_2=\frac{-1+\sqrt{3}+(-4+2\sqrt{3})r_1-4{r_1}^2}{4-\sqrt{3}+4r_1}$$

$r_1=\dfrac{-1+3\sqrt{3}}{13}$ より，$r_2=\dfrac{5+11\sqrt{3}}{13(48-\sqrt{3})}=\dfrac{21+41\sqrt{3}}{2301}$ $(\fallingdotseq 0.0399887)$

$\angle \mathrm{O_1BD}=\alpha$，$\angle \mathrm{O_3BD}=\beta$ とおくと，$\angle \mathrm{O_1BO_3}=\alpha-\beta$

$\triangle \mathrm{O_1BO_3}$ に余弦定理を適用すると，

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{(1-r_1)^2+(1-r_2)^2-(r_1+r_3)^2}{2(1-r_1)(1-r_2)}=\frac{1-r_1-r_3-r_1r_3}{(1-r_1)(1-r_2)} \quad \cdots①$$

$\triangle \mathrm{O_1BD}$ に余弦定理を適用すると，$\cos\alpha=\dfrac{1^2+(1-r_1)^2-(1+r_1)^2}{2\cdot 1\cdot(1-r_1)}=\dfrac{1-4r_1}{2(1-r_1)}$

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{\sqrt{3(1-4{r_1}^2)}}{2(1-r_1)}$$

$\triangle \mathrm{O_3BD}$ に余弦定理を適用すると，$\cos\beta=\dfrac{1^2+(1-r_3)^2-(1+r_3)^2}{2\cdot 1\cdot(1-r_3)}=\dfrac{1-4r_3}{2(1-r_3)}$

$$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\frac{\sqrt{3(1-4{r_3}^2)}}{2(1-r_3)}$$

これらを①に代入すると，$\dfrac{1-4r_1}{2(1-r_1)}\cdot\dfrac{1-4r_3}{2(1-r_3)}+\dfrac{\sqrt{3(1-4{r_1}^2)}}{2(1-r_1)}\cdot\dfrac{\sqrt{3(1-4{r_3}^2)}}{2(1-r_3)}=\dfrac{1-r_1-r_3-r_1r_3}{(1-r_1)(1-r_2)}$

分母を払って移項すると，$3\sqrt{(1-4{r_1}^2)(1-4{r_3}^2)}=3-20r_1r_3$

両辺を２乗すると，$9(1-4{r_1}^2)(1-4{r_3}^2)=(3-20r_1r_3)^2$

移項して整理すると，$(9+64{r_1}^2){r_3}^2-30r_1r_3+9{r_1}^2=0$

$\dfrac{r_3}{3r_1}=x$ とおくと，$(9+64{r_1}^2)x^2-10x+1=0$　$x=\dfrac{5\pm\sqrt{5^2-(9+64{r_1}^2)}}{9+64{r_1}^2}=\dfrac{5\pm4\sqrt{1-4{r_1}^2}}{9+64{r_1}^2}$

$r_3<r_1$ より，$x<\dfrac{1}{3}$ であるから，$x=\dfrac{r_3}{3r_1}=\dfrac{5-4\sqrt{1-4{r_1}^2}}{9+64{r_1}^2}$　$\therefore r_3=\dfrac{3r_1(5-4\sqrt{1-4{r_1}^2})}{9+64{r_1}^2}$

$r_1=\dfrac{-1+3\sqrt{3}}{13}$ を代入すると，

$r_3=\dfrac{3(-65+195\sqrt{3}-4\sqrt{6(194+55\sqrt{3})})}{3313-384\sqrt{3}}=\dfrac{3(-65+195\sqrt{3}-4(33+5\sqrt{3}))}{3313-384\sqrt{3}}=\dfrac{3(-17+19\sqrt{3})}{397}$

（≒ 0.120219 ）

よって，各円の半径は，甲：$\dfrac{-1+3\sqrt{3}}{13}$，乙：$\dfrac{21+41\sqrt{3}}{2301}$，丙：$\dfrac{3(-17+19\sqrt{3})}{397}$　答

追加問題２

［Ⅰ］

1000 人に 1 人の割合で（ 0.1 %）で人間に感染しているウイルスがある。太郎さんは，このウイルスに感染しているかどうか検査を受けたところ，陽性と判定された。太郎さんの受けた検査の精度は,感染者のうち 70 %の人が正しく陽性と判定され, また, 非感染者のうち 99 %の人が正しく陰性と判定されるものとする。

太郎さんの住んでいる都市の人口は約 10 万人であるとき，

(1)　この都市で実際に感染している人は何人ですか。

(2)　感染している人たちが全員検査を受けたとすると，何人が正しく陽性と判定されるか。

(3)　感染していない人が全員検査を受けたとすると，この中で何人の人が間違って陽性と判定されますか。

(4)　この都市の人口のうち，陽性と判定される人は全部で何人ですか。

(5)　以上の事から， 太郎さんが実際に感染している可能性は何%であると考えられますか。ただし，小数第 2 位を四捨五入して求めてください。

解答

(1)　10 万人× 0.1 %＝ 100000×0.001 ＝ 100 人

(2)　感染者のうち 70 %が正しく陽性と判断されるから， 100×0.7＝70 人

(3)　非感染者のうち 1 %は間違って陽性と判定されるから，(100000－100) の 1 %，すなわち 99900×0.01＝999 人

(4)　70＋999＝1069 人

(5)　陽性と判断されるのは 1069 人で，このうち実際の感染者は 70 人であるから，
　　陽性と判断された太郎さんの感染確率は， 70÷1069×100＝6.548… ≒ 6.6 %

［Ⅱ］　一般に

n 人に 1 人の割合で人間に感染しているウイルスがある。太郎さんは，このウイルスに感染しているかどうか検査を受けたところ，陽性と判定された。

太郎さんの受けた検査の精度は，感染者のうち a %の人が正しく陽性と判定され，また，非感染者のうち b %の人が正しく陰性と判定されるものとする。

太郎さんの住んでいる都市の人口は N 人であるとき，太郎さんが実際に感染している可能性は何%であると考えられるか求めよ。

出典　2023 年　神奈川県浅野中入試問題　一部文章改題

解答　N 人のうち実際に感染している人は，$N\times\dfrac{1}{n}=\dfrac{N}{n}$ 人で，この人たちが全員検査を受けたとすると，

$\dfrac{N}{n}\times\dfrac{a}{100}=\dfrac{aN}{100n}$ 人が正しく陽性と判定される。

また，感染していない人 $\left(N-\dfrac{N}{n}\right)$ 人が全員検査を受けたとすると，非感染者のうち，$\dfrac{100-b}{100}$ が陽性と判定される

ので，$\left(N-\dfrac{N}{n}\right)\times\dfrac{100-b}{100}=\dfrac{N(n-1)(100-b)}{100n}$ 人が間違って陽性と判定される。したがって，陽性と判定される

人はこの都市の人口のうち全部で $\dfrac{aN}{100n}+\dfrac{N(n-1)(100-b)}{100n}=\dfrac{N\{a+(n-1)(100-b)\}}{100n}$ 人いることになる。

このうち実際の感染者は $\dfrac{aN}{100n}$ 人だから，Aさんが実際に感染している可能性は，

$$\frac{\dfrac{aN}{100n}}{\dfrac{N\{a+(n-1)(100-b)\}}{100n}}\times 100=\frac{100a}{a+(n-1)(100-b)}\ (\%)$$ 答

と考えられる。

補足　A さんの住んでいる都市の人口 N は結果に無関係である。

例　[I] に適用すると，$n=1000$，$a=70$，$b=99$ であるから，

$\dfrac{100\cdot 70}{70+(1000-1)(100-99)}=\dfrac{7000}{1069}=6.548\cdots$　小数第 2 位を四捨五入すると，6.5 %

(2023/5/28　ジョーカー)