問題1　等式がp進数で表現されているとして、10進数に変換して考えます。

(1)$\frac{1}{p}+\frac{3}{p^2}=\frac{1}{4}$⇒p=−2,6なので、6進数です。

(2)左辺を級数で表します。

$$左辺=\frac{2}{p}+\frac{2}{p^2}+\frac{2}{p^3}+\cdots$$

$$=\frac{2}{p}\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\cdots\right)$$

$=\frac{2}{p}\frac{1}{1-\frac{1}{p}}=\frac{1}{3}$⇒p=7なので、7進数です。

(3)左辺を2つの級数に分けて考えます。

$$左辺=\frac{3}{p}+\frac{7}{p^2}+\frac{3}{p^3}+\frac{7}{p^4}+\frac{3}{p^5}+\frac{7}{p^6}+\cdots$$

$$=\frac{3}{p}\left(1+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^4}+\cdots\right)+\frac{7}{p^2}\left(1+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^4}+\cdots\right)$$

$$=\left(\frac{3}{p}+\frac{7}{p^2}\right)\left(1+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^4}+\cdots\right)$$

$=\left(\frac{3}{p}+\frac{7}{p^2}\right)\frac{1}{1-\frac{1}{p^2}}=\frac{1}{3}$⇒p=−2,11なので、11進数です。

(4)左辺を3つの級数に分けて考えます。

$$左辺=\frac{1}{p}+\frac{2}{p^2}+\frac{3}{p^3}+\frac{1}{p^4}+\frac{2}{p^5}+\frac{3}{p^6}+\cdots$$

$$=\frac{1}{p}\left(1+\frac{1}{p^3}+\cdots\right)+\frac{2}{p^2}\left(1+\frac{1}{p^3}+\cdots\right)+\frac{3}{p^3}\left(1+\frac{1}{p^3}+\cdots\right)$$

$$=\left(\frac{1}{p}+\frac{2}{p^2}+\frac{3}{p^3}\right)\left(1+\frac{1}{p^3}+\cdots\right)$$

$=\left(\frac{1}{p}+\frac{2}{p^2}+\frac{3}{p^3}\right)\frac{1}{1-\frac{1}{p^3}}=\frac{3}{p+3}$⇒p=4なので、4進数です。

(5)左辺を2つの級数に分けて考えます。

$$左辺=\frac{1}{p^2}+\frac{3}{p^3}+\frac{1}{p^4}+\frac{3}{p^5}+\frac{1}{p^6}+\frac{3}{p^7}+\cdots$$

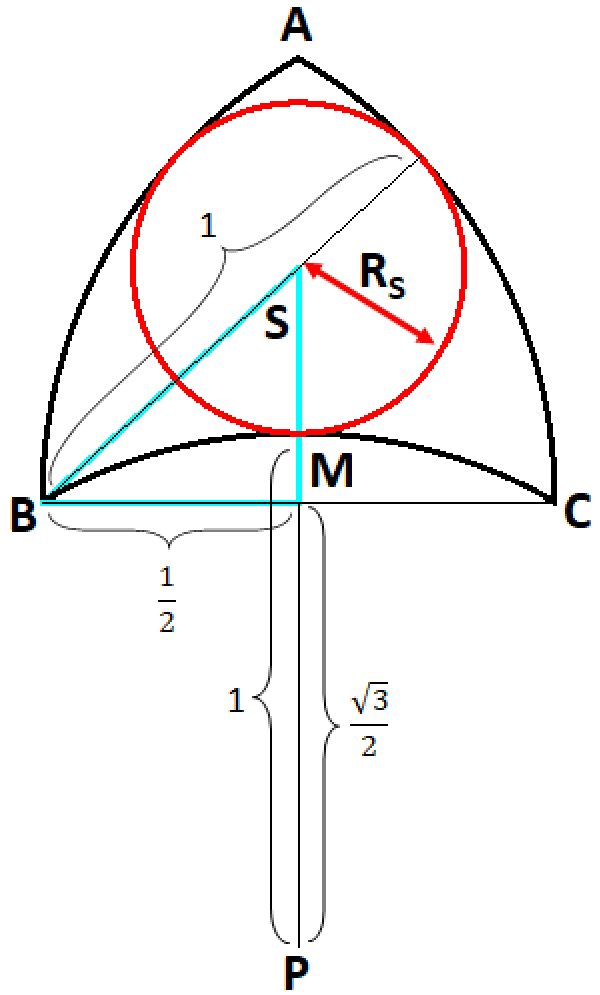
$$=\frac{1}{p^2}\left(1+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^4}+\cdots\right)+\frac{3}{p^3}\left(1+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^4}+\cdots\right)$$

$$=\left(\frac{1}{p^2}+\frac{3}{p^3}\right)\left(1+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^4}+\cdots\right)$$

$=\left(\frac{1}{p^2}+\frac{3}{p^3}\right)\frac{1}{1-\frac{1}{p^2}}=\frac{1}{3p}$⇒p=−2,5なので、5進数です。

追加問題1

・甲の半径について



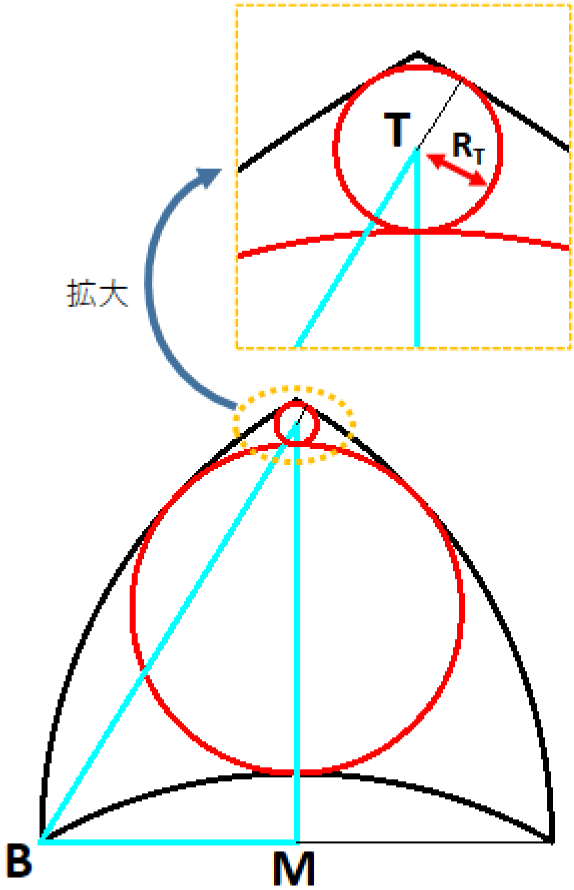
左図のように点をとって補助線を入れます。点 S は甲の中心、点 M は線分 BC の中点、点 P は弧 BC の中心です。

△BSM に着目します。甲の半径R_sをとして、三平方の定理を適用すると、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}+R_s\right)^2=(1-R_s)^2$$

です。これを解いて、$R_s=\frac{3\sqrt{3}-1}{13}$となります。よって、甲の半径$=\frac{3\sqrt{3}-1}{13}$です。

・乙の半径について



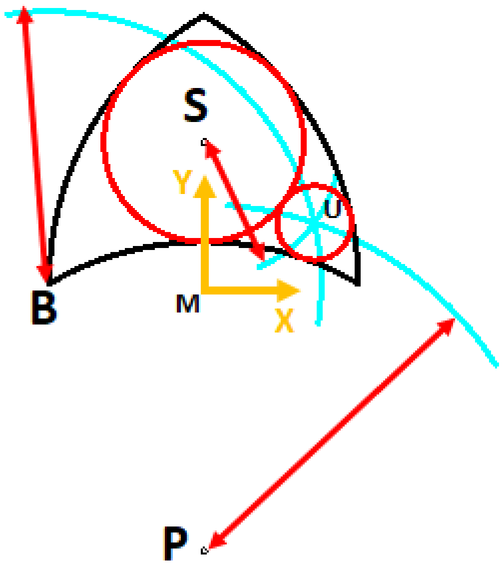
左図のように点をとって補助線を入れます。点Tは乙の中心です。

△BTM に着目します。乙の半径R_Tをとして、三平方の定理を適用すると、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}+2R_s+R_T\right)^2=(1-R_T)^2$$

です。$R_s=\frac{3\sqrt{3}-1}{13}$なので、これを解いて、$R_T=\frac{21+41\sqrt{3}}{2301}$となります。よって、乙の半径$=\frac{21+41\sqrt{3}}{2301}$です。

・丙の半径について



良いやり方が見つからなかったので、無理矢理答えを出しました。

左図のように、点 M にオレンジ色の座標系を導入します。すると、丙の半径R_Uとしたとき、その中心は、次の円の交点です。

・中心$S\left(0,1-\frac{\sqrt{3}}{2}+R_S\right)$、半径$R_s+R_U$

・中心$B\left(-\frac{1}{2},0\right)$、半径$1-R_U$

・中心$P\left(0,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$、半径$1+R_U$

丙の中心$U(x,y)$とすると、$R_s=\frac{3\sqrt{3}-1}{13}$なので、

$$x^2+\left(y-\frac{24-7\sqrt{3}}{26}\right)^2=\left(\frac{3\sqrt{3}-1}{13}+R_U\right)^2\cdots①$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=(1-R_U)^2\cdots②$$

$$x^2+\left(y+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=(1+R_U)^2\cdots③$$

これらを解くと、

$$(x,y,R_U)=\left(\frac{194-30\sqrt{3}}{397},\frac{396-139\sqrt{3}}{794},\frac{57\sqrt{3}-51}{397}\right)\left(-\frac{118+6\sqrt{3}}{157},\frac{252-75\sqrt{3}}{314},\frac{33\sqrt{3}+21}{157}\right)$$

x>0 なので、後者は不適です。よって、丙の半径$=\frac{57\sqrt{3}-51}{397}$です。

追加問題2

I

(1)10 万人×0.1%=100 人

(2)100 人×70%=70 人

(3)非感染者数×誤判定率=(10 万人−100 人)×(100%−99%)=999 人

(4)(2)と(3)を合わせた人数なので、70+999=1069 人

(5)(4)の中で、(2)の占める割合なので、70 人/1069 人= 0.0654=6.5%

II

前問を参考にして、数値を抽象化します。

(1)$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{n}}$

(2)$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{n}}\cdot\frac{\mathrm{a}}{100}$

(3)$\left(\mathrm{N}-\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{n}}\right)\left(1-\frac{\mathrm{b}}{100}\right)$

(4)$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{n}}\cdot\frac{\mathrm{a}}{100}+\left(\mathrm{N}-\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{n}}\right)\left(1-\frac{\mathrm{b}}{100}\right)$

(5)$\frac{\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{n}}\cdot\frac{\mathrm{a}}{100}}{\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{n}}\cdot\frac{\mathrm{a}}{100}+\left(\mathrm{N}-\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{n}}\right)\left(1-\frac{\mathrm{b}}{100}\right)}\times 100=\frac{100a}{a+(n-1)(100-b)}$

以上より、太郎さんが実際に感染している可能性は$\frac{100a}{a+(n-1)(100-b)}$%です。