第 428 回

問題 1　次の連立 3 元 2 次方程式の解を求めよ。

$x^2-yz=2\quad y^2-zx=3\quad z^2-xy=4$

解答　$x^2-yz=2$　…①　$y^2-zx=3$　…②　$z^2-xy=4$　…③とおく。

①+②+③より，$x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy=9$　…④

①× x +②× y +③× z より，$x^3+y^3+z^3-3xyz=2x+3y+4z$

因数分解すると，$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)=2x+3y+4z$

これに④を代入すると，$(x+y+z)\cdot 9=2x+3y+4z$　$\therefore z=-\dfrac{7x+6y}{5}$　…⑤

⑤を①，②に代入すると，$5x^2+7xy+6y^2=10$　…①′　$7x^2+6xy+5y^2=15$　…②′

①′× 3 −②′× 2 より，$(x+y)(x+8y)=0$

[1]　$x+y=0$ のとき，$(x,\ y)=\left(\mp\dfrac{\sqrt{10}}{2},\pm\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)$　⑤より，$z=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　(複号同順)

これを③に代入すると，$z^2-xy=\dfrac{13}{5}\fallingdotseq 4$ となり不適

[2]　$x+8y=0$ のとき，$(x,\ y)=\left(\mp\dfrac{8\sqrt{3}}{9},\ \pm\dfrac{\sqrt{3}}{9}\right)$　⑤より，$z=\pm\dfrac{10\sqrt{3}}{9}$　(複号同順)

これを③に代入すると，$z^2-xy=4$となり適

よって，$(x,\ y,\ z)=\left(\mp\dfrac{8\sqrt{3}}{9},\ \pm\dfrac{\sqrt{3}}{9},\ \pm\dfrac{10\sqrt{3}}{9}\right)$ (複号同順)　答

問題 2　次の連立 5 元 3 次方程式の解を求めよ。

$x^3-y^3=296$，$y^3-z^3=49.625$，$z^3-u^3=41.375$，$u^3-w^3=33.875$，$x+y+z+u+w=29$

ここでは，x，y，z，u，w は正の数，また，x，y は整数とする。

解答　$x^3-y^3=296$　…①，$y^3-z^3=49.625$　…②，$z^3-u^3=41.375$　…③，$u^3-w^3=33.875$　…④，

$x+y+z+u+w=29$　…⑤とおく。

①より，$(x-y)(x^2+xy+y^2)=2^3\cdot 37$

x，y は正の整数で，$x-y<x^2+xy+y^2$ より，$(x,\ y)=(1,\ 296)$，$(2,\ 148)$，$(4,\ 74)$，$(8,\ 37)$ の 4 通り考えられる。

[1]　$(x,-y\ \ x^2+xy+y^2)=(1,\ 296)$ のとき，$x=\dfrac{3+13\sqrt{21}}{6}$，$y=\dfrac{-3+13\sqrt{21}}{6}$ より，不適

[2]　$(x,-y\ \ x^2+xy+y^2)=(2,\ 148)$ のとき，$x=8$，$y=6$ より，適

[3]　$(x,-y\ \ x^2+xy+y^2)=(4,\ 74)$ のとき，$x=\dfrac{6+\sqrt{210}}{3}$，$y=\dfrac{-6+\sqrt{210}}{3}$ より，不適

[4]　$(x,-y\ \ x^2+xy+y^2)=(8,\ 37)$ のとき，$x=4+\sqrt{7}$，$y=-4+\sqrt{7}$ より，不適

従って，$x=8$，$y=6$ である。

このとき，②より，$6^3-z^3=49.625$　$\therefore z=5.5$

このとき，③より，$5.5^3-u^3=41.375$　$\therefore u=5$

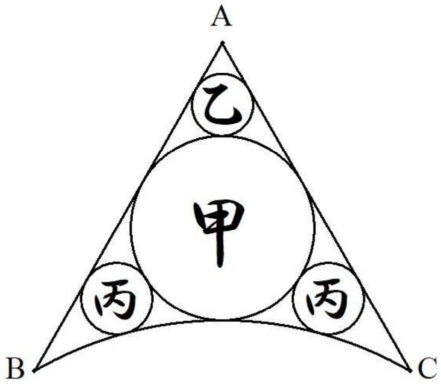
このとき，④より，$5^3-w^3=33.875 \quad \therefore w=4.5$

このとき，⑤の左辺＝$x+y+z+u+w=8+6+5.5+5+4.5=29$＝右辺となり，⑤は成立する。

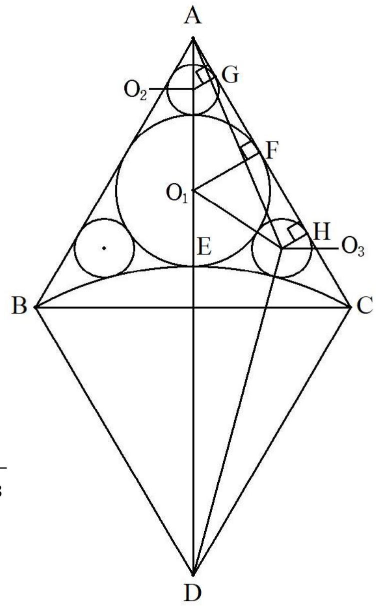
よって，$(x,\ y,\ z,\ u,\ w)=\left(8,\ 6,\ \dfrac{11}{2},\ 5,\ \dfrac{9}{2}\right)$ 答

追加問題１

A，B，Cは１辺の長さが１の正三角形の頂点で，
弧 BC は半径１の円弧である。
図のようにこの図形の中に，互いに接する甲乙丙円を配置する。
甲乙丙円の半径をそれぞれ求めよ。



解答　甲乙丙円を $O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$，$O_3(r_3)$ とおき，図のように記号を付ける。



$\triangle AO_1F$ について，$\angle AO_1F=60^\circ$ であるから，$AO_1=2\,O_1F=2r_1$

また，$AO_1=AE-O_1E=(\sqrt{3}-1)-r_1$ であるから，$2r_1=\sqrt{3}-1-r_1$

$\therefore r_1=\dfrac{\sqrt{3}-1}{3}$ （≒ 0.244017）

$\triangle AO_2G$ について，$\angle AO_2G=60^\circ$ であるから，$AO_2=2\,O_2G=2r_2$

$AO_1=2r_2+r_2+r_1=2r_1$ より，$r_2=\dfrac{1}{3}r_1=\dfrac{\sqrt{3}-1}{9}$ （≒ 0.081339）

次に，$AH=AF+FH=\sqrt{3}r_1+2\sqrt{r_1r_3}$ であるから，

$\triangle AO_3H$ に三平方の定理を適用して，

$AO_3^2=AH^2+O_3H_2=(\sqrt{3}r_1+2\sqrt{r_1r_3})^2+r_3^2=3r_1^2+4r_1r_3+r_3^2+4\sqrt{3}r_1\sqrt{r_1r_3}$

$\triangle AO_1O_3$ について，$AO_1=2r_1$，$O_1O_3=r_1+r_3$ であるから余弦定理により，

$$\cos\angle AO_1O_3=\frac{(2r_1)^2+(r_1+r_3)^2-AO_3^2}{2\cdot 2r_1(r_1+r_3)}$$

$$=\frac{(2r_1)^2+(r_1+r_3)^2-(3r_1^2+4r_1r_3+r_3^2+4\sqrt{3}\sqrt{r_1r_3})}{2\cdot 2r_1(r_1+r_3)}=\frac{r_1-r_3-2\sqrt{3}\sqrt{r_1r_3}}{2(r_1+r_3)} \quad \cdots ①$$

$\triangle O_3O_1D$ について，$O_1D=1+r_1$，$DO_3=1+r_3$ であるから，余弦定理により，

$$\cos\angle O_3O_1D=\frac{(1+r_1)^2+(r_1+r_3)^2-(1+r_3)^2}{2(1+r_1)(r_1+r_3)}=\frac{r_1(1+r_1)-(1-r_1)r_3}{(1+r_1)(r_1+r_3)} \quad \cdots ②$$

$\angle AO_1O_3+\angle O_3O_1D=180^\circ$ より，$\cos\angle AO_1O_3+\cos\angle O_3O_1D=0$ であるから，①，②を代入して，

$$\frac{r_1-r_3-2\sqrt{3}\sqrt{r_1r_3}}{2(r_1+r_3)}+\frac{r_1(1+r_1)-(1-r_1)r_3}{(1+r_1)(r_1+r_3)}=0$$

分母を払うと，$(1+r_1)(r_1-r_3-2\sqrt{3}\sqrt{r_1r_3})+2\{r_1(1+r_1)-(1-r_1)r_3\}=0$

移項すると，$(3-r_1)r_3+2\sqrt{3}(1+r_1)\sqrt{r_1r_3}-3r_1(1+r_1)=0$

$$\sqrt{r_3}=\frac{-\sqrt{3}(1+r_1)\sqrt{r_1}\pm\sqrt{3(1+r_1)^2r_1+(3-r_1)\cdot 3r_1(1+r_1)}}{3-r_1}=\frac{-\sqrt{3}(1+r_1)\sqrt{r_1}\pm 2\sqrt{3r_1(1+r_1)}}{3-r_1}$$

$\sqrt{r_3}>0$ より，$\sqrt{r_3}=\dfrac{-\sqrt{3}(1+r_1)\sqrt{r_1}+2\sqrt{3r_1(1+r_1)}}{3-r_1}=\dfrac{\sqrt{3r_1(1+r_1)}(2-\sqrt{1+r_1})}{3-r_1}$

$$\therefore r_3=\frac{3r_1(1+r_1)(5+r_1-4\sqrt{1+r_1})}{(3-r_1)^2}$$

ここで，$r_1=\dfrac{\sqrt{3}-1}{3}$ のとき，$3r_1(1+r_1)=\dfrac{1+\sqrt{3}}{3}$，$5+r_1=\dfrac{14+\sqrt{3}}{3}$，$4\sqrt{1+r_1}=\dfrac{2(3\sqrt{2}+\sqrt{6})}{3}$，

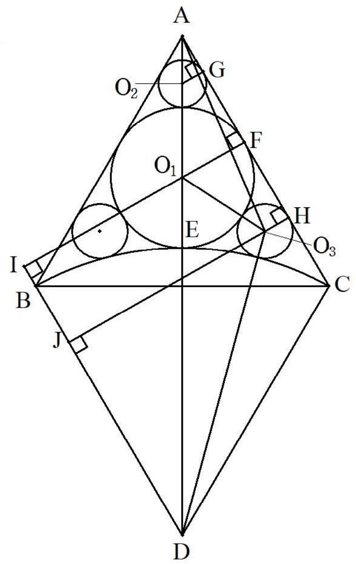
$\dfrac{1}{(3-r_1)^2}=\dfrac{1}{\left(\dfrac{10-\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\dfrac{9(103+20\sqrt{3})}{97^2}$ であるから，

$$r_3=\frac{1+\sqrt{3}}{3}\cdot\left\{\frac{14+\sqrt{3}}{3}+\frac{2(3\sqrt{2}+\sqrt{6})}{3}\right\}\cdot\frac{9(103+20\sqrt{3})}{97^2}$$

$$=\frac{2651-1716\sqrt{2}+1885\sqrt{3}-1064\sqrt{6}}{9409}\quad(\fallingdotseq 0.0938323)$$

よって，各円の半径は，甲：$\dfrac{\sqrt{3}-1}{3}$，乙：$\dfrac{\sqrt{3}-1}{9}$，丙：$\dfrac{2651-1716\sqrt{2}+1885\sqrt{3}-1064\sqrt{6}}{9409}$　答

(r_3) （別解 1）



$\triangle O_1ID$ に三平方の定理を適用して，

$$ID=\sqrt{(1+r_1)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-r_1\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+(2+\sqrt{3})r_1}$$

同様に，$\triangle O_3JD$ に三平方の定理を適用して，

$$JD=\sqrt{(1+r_3)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-r_3\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+(2+\sqrt{3})r_3}$$

$$IJ=FH=\sqrt{(r_1+r_3)^2-(r_1-r_3)^2}=2\sqrt{r_1r_3}$$

$ID-JD=IJ$ であるから，$\sqrt{\dfrac{1}{4}+(2+\sqrt{3})r_1}-\sqrt{\dfrac{1}{4}+(2+\sqrt{3})r_3}=2\sqrt{r_1r_3}$

両辺を 2 乗すると，

$$\frac{1}{2}+(2+\sqrt{3})r_1+(2+\sqrt{3})r_3-2\sqrt{\frac{1}{4}+(2+\sqrt{3})r_1}\sqrt{\frac{1}{4}+(2+\sqrt{3})r_3}=4r_1r_3$$

両辺に 2 を掛けて，移項すると，$1+2(2+\sqrt{3})r_1+2(2+\sqrt{3}-4r_1)r_3=\sqrt{1+4(2+\sqrt{3})r_1}\sqrt{1+4(2+\sqrt{3})r_3}$

両辺を 2 乗して，r_3 について整理すると，$(2+\sqrt{3}-4r_1)^2r_3{}^2-2r_1\{9+4\sqrt{3}+4(2+\sqrt{3})r_1\}r_3+(7+4\sqrt{3})r_1{}^2=0$

両辺を $r_1{}^2$ で割り，$\dfrac{r_3}{r_1}=x$ とおくと，$(2+\sqrt{3}-4r_1)^2x^2-2\{9+4\sqrt{3}+4(2+\sqrt{3})r_1\}x+(2+\sqrt{3})^2=0$

$$x=\frac{9+4\sqrt{3}+4(2+\sqrt{3})r_1\pm 4\sqrt{2+\sqrt{3}+4(2+\sqrt{3})^2r_1}}{(2+\sqrt{3}-4r_1)^2}$$

$$=\frac{9+4\sqrt{3}+4(2+\sqrt{3})r_1\pm 2(1+\sqrt{3})\sqrt{2+8(2+\sqrt{3})r_1}}{(2+\sqrt{3}-4r_1)^2}$$

$r_1=\dfrac{\sqrt{3}-1}{3}$ のとき，

$9+4\sqrt{3}+4(2+\sqrt{3})r_1=\dfrac{31+16\sqrt{3}}{3}$，$2(1+\sqrt{3})\sqrt{2+8(2+\sqrt{3})r_1}=\dfrac{18\sqrt{2}+10\sqrt{6}}{3}$，

$\dfrac{1}{(2+\sqrt{3}-4r_1)^2}=\dfrac{9(10+\sqrt{3})^2}{97^2}$ であるから，

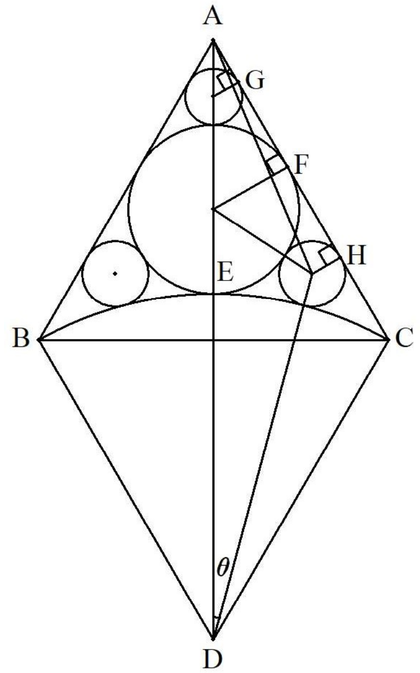
$x=\left(\dfrac{31+16\sqrt{3}}{3}\pm\dfrac{18\sqrt{2}+10\sqrt{6}}{3}\right)\cdot\dfrac{9(10+\sqrt{3})^2}{97^2}=\dfrac{r_3}{r_1}$ より，

$r_3=\left(\dfrac{31+16\sqrt{3}}{3}\pm\dfrac{18\sqrt{2}+10\sqrt{6}}{3}\right)\cdot\dfrac{9(10+\sqrt{3})^2}{97^2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}-1}{3}=\dfrac{2651+1885\sqrt{3}\pm(1716\sqrt{2}+1064\sqrt{6})}{9409}$

ここで，$\dfrac{2651+1885\sqrt{3}-(1716\sqrt{2}+1064\sqrt{6})}{9409}\fallingdotseq 0.0938323$，$\dfrac{2651+1885\sqrt{3}+(1716\sqrt{2}+1064\sqrt{6})}{9409}\fallingdotseq 1.16367$

であるから，題意に適するのは，$r_3=\dfrac{2651-1716\sqrt{2}+1885\sqrt{3}-1064\sqrt{6}}{9409}$

(r_3) （別解２）



AH＝AF＋FH＝$\sqrt{3}r_1+2\sqrt{r_1r_3}$，$O_3$H＝$r_3$ であるから，

△AO_3H に三平方の定理を適用して，$AO_3{}^2=(\sqrt{3}r_1+2\sqrt{r_1r_3})^2+r_3{}^2$ …①

∠ADO_3＝∠O_1DO_3＝θ とおく。

△ADO_3 に余弦定理を適用すると，$\cos\theta=\dfrac{(\sqrt{3})^2+(1+r_3)^2-AO_3{}^2}{2\sqrt{3}(1+r_3)}$

これに①を代入すると，

$$\cos\theta=\frac{(\sqrt{3})^2+(1+r_3)^2-(\sqrt{3}r_1+2\sqrt{r_1r_3})^2-r_3{}^2}{2\sqrt{3}(1+r_3)}$$

$$=\frac{4-3r_1{}^2-4\sqrt{3}r_1\sqrt{r_1r_3}+(2-4r_1)r_3}{2\sqrt{3}(1+r_3)}\quad\cdots②$$

△O_1DO_3 に余弦定理を適用すると，

$$\cos\theta=\frac{(1+r_1)^2+(1+r_3)^2-(r_1+r_3)^2}{2(1+r_1)(1+r_3)}=\frac{1+r_1+(1-r_1)r_3}{(1+r_1)(1+r_3)}\quad\cdots③$$

②，③より，$\dfrac{4-3r_1{}^2-4\sqrt{3}r_1\sqrt{r_1r_3}+(2-4r_1)r_3}{2\sqrt{3}(1+r_3)}=\dfrac{1+r_1+(1-r_1)r_3}{(1+r_1)(1+r_3)}$

分母を払い移項すると，$(1+r_1)\{4-3r_1{}^2-4\sqrt{3}r_1\sqrt{r_1r_3}+(2-4r_1)r_3\}-2\sqrt{3}\{1+r_1+(1-r_1)r_3\}=0$

r_3 について整理すると，

$$4-2\sqrt{3}+(4-2\sqrt{3})r_1-3r_1{}^2-3r_1{}^3-4\sqrt{3}(r_1+r_1{}^2)\sqrt{r_1}\sqrt{r_3}+\{2-2\sqrt{3}+(-2+2\sqrt{3})r_1-4r_1{}^2\}r_3=0\quad\cdots④$$

ここで，$r_1=\dfrac{\sqrt{3}-1}{3}$ より，$3r_1+1=\sqrt{3}$，$9r_1{}^2+6r_1-2=0$ であるから，

（定数項）$4-2\sqrt{3}+(4-2\sqrt{3})r_1-3r_1{}^2-3r_1{}^3=(9r_1{}^2+6r_1-2)\left(-\dfrac{1}{3}r_1-\dfrac{1}{9}\right)+(4-2\sqrt{3})r_1+\dfrac{34}{9}-2\sqrt{3}$

$$=(4-2\sqrt{3})r_1+\frac{34}{9}-2\sqrt{3}=\frac{4}{9}$$

（$\sqrt{r_3}$ の係数）$-4\sqrt{3}(r_1+r_1{}^2)\sqrt{r_1}=-4\sqrt{3}\left(r_1+\dfrac{-6r_1+2}{9}\right)\sqrt{r_1}=-\dfrac{4\sqrt{3}}{9}(3r_1+2)\sqrt{r_1}$

$$=-\frac{4}{9}(3+\sqrt{3})\sqrt{\frac{-1+\sqrt{3}}{3}}=-\frac{4}{9}\sqrt{2+2\sqrt{3}}$$

（r_3 の係数）$2-2\sqrt{3}+(-2+2\sqrt{3})r_1-4r_1{}^2=2-2\sqrt{3}+(-2+2\sqrt{3})r_1-4\cdot\dfrac{-6r_1+2}{9}$

$$=\frac{2}{9}\{5-9\sqrt{3}+(3+9\sqrt{3})r_1\}=\frac{2}{9}(13-11\sqrt{3})$$

④は，$\frac{4}{9}-\frac{4}{9}\sqrt{2+2\sqrt{3}}\ \sqrt{r_3}+\frac{2}{9}(13-11\sqrt{3})\,r_3=0\quad\therefore(-13+11\sqrt{3})r_3+2\sqrt{2+2\sqrt{3}}\,\sqrt{r_3}-2=0$

$$\sqrt{r_3}=\frac{-\sqrt{2+2\sqrt{3}}\pm\sqrt{2+2\sqrt{3}+2(-13+11\sqrt{3})}}{-13+11\sqrt{3}}$$

$\sqrt{r_3}>0$ より，$\sqrt{r_3}=\dfrac{-\sqrt{2+2\sqrt{3}}+\sqrt{-24+24\sqrt{3}}}{-13+11\sqrt{3}}$

$$r_3=\frac{-22+26\sqrt{3}-2\sqrt{(2+2\sqrt{3})(-24+24\sqrt{3})}}{(-13+11\sqrt{3})^2}=\frac{-22+26\sqrt{3}-8\sqrt{6}}{(-13+11\sqrt{3})^2}=\frac{-11+13\sqrt{3}-4\sqrt{6}}{266-143\sqrt{3}}$$

$$=\frac{(-11+13\sqrt{3}-4\sqrt{6})(266+143\sqrt{3})}{266^2-143^2\cdot3}=\frac{2651-1716\sqrt{2}+1885\sqrt{3}-1064\sqrt{6}}{9409}\quad(\fallingdotseq 0.0938323)$$

追加問題２

３軒Ａ，Ｂ，Ｃがこの順に並んだ家がある。各々が１年以内に火事を出す確率は a で，１軒が焼けたときその隣の焼ける確率は b である。各々の家が１年以内に焼ける確率を求めよ。

解答

Ａが火を出す確率は，a

ＡがＢからの類焼を受ける確率は，ab

ＡがＣからの類焼を受ける確率は，ab^2

よってＡが焼けない確率は，$(1-a)(1-ab)(1-ab^2)$

よってＡが１年以内に焼ける確率は，$1-(1-a)(1-ab)(1-ab^2)=a(1+b-ab+b^2-ab^2-ab^3+a^2b^3)$

Ｃに関しても同様である。

次にＢがＡまたはＣから類焼を受ける確率は，ab

よってＢが１年以内に焼ける確率は，$1-(1-a)(1-ab)^2=a(1+2b-2ab-ab^2+a^2b^2)$

答　Ａ，Ｃ：$a(1+b-ab+b^2-ab^2-ab^3+a^2b^3)$，Ｂ：$a(1+2b-2ab-ab^2+a^2b^2)$

例　$a=\dfrac{1}{1000}$，$b=\dfrac{1}{5}$ のとき，Ａ，Ｃ：$\dfrac{154969001}{125\times10^9}$，Ｂ：$\dfrac{34989001}{25\times10^9}$

（2023/6/28　ジョーカー）