第428回　問題1の一般化

a，b，c は異なる正の数で，$(a^2-bc)(b^2-ca)(c^2-ab)\fallingdotseq 0$ とする。次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} x^2-yz=a \\ y^2-zx=b \\ z^2-xy=c \end{cases}$$

$\boxed{\text{解答}}$

$$\begin{cases} x^2-yz=a & \cdots① \\ y^2-zx=b & \cdots② \\ z^2-xy=c & \cdots③ \end{cases}$$ とおく。

①+②+③より，$x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy=a+b+c \quad \cdots④$

①× x +②× y +③× z より，$x^3+y^3+z^3-3xyz=ax+by+cz$

因数分解すると，$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)=ax+by+cz$

④を代入すると，$(x+y+z)(a+b+c)=ax+by+cz$

z について解くと，$z=-\dfrac{(b+c)x+(a+c)y}{a+b} \quad \cdots⑤$

⑤を①，②に代入すると，

$(a+b)x^2+(b+c)xy+(c+a)y^2=a(a+b) \quad \cdots①'$　$(b+c)x^2+(c+a)xy+(a+b)y^2=b(a+b) \quad \cdots②'$

$y=kx$ とおくと，

$(a+b)x^2+(b+c)kx^2+(c+a)k^2x^2=a(a+b) \quad \cdots①''$　$(b+c)x^2+(c+a)kx^2+(a+b)k^2x^2=b(a+b) \quad \cdots②''$

$x\fallingdotseq 0$ であるから，

（∵）$x=0$ のとき，与えられた連立方程式は，$-yz=a$，$y^2=b$，$z^2=c$ となる。

　　y，z を消去すると，$bc=a^2$ となるが，仮定より，$bc\fallingdotseq a^2$ であるから，$x\fallingdotseq 0$　■

①″÷②″を辺々計算すると，$\dfrac{a+b+(b+c)k+(c+a)k^2}{b+c+(c+a)k+(a+b)k^2}=\dfrac{a}{b}$

分母を払って整理すると，$(a^2-bc)k^2+(a-b)(a+b+c)k-(b^2-ac)=0$

因数分解すると，$(k+1)\{(a^2-bc)k-(b^2-ca)\}=0 \quad \therefore k=-1$，$k=\dfrac{b^2-ca}{a^2-bc}$

[1]　$k=\dfrac{b^2-ca}{a^2-bc}$ のとき，①″より，$x^2=\dfrac{(a^2-bc)^2}{a^3+b^3+c^3-3abc}$

仮定より，$a^3>0$，$b^3>0$，$c^3>0$ である。

相加平均≧相乗平均より，$\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}\geqq\sqrt[3]{a^3b^3c^3}=abc$ （等号は，$a=b=c$ のとき）

a，b，c は異なるから，等号が成り立つことはない。従って，$a^3+b^3+c^3-3abc>0$

$\therefore x=\pm\dfrac{a^2-bc}{\sqrt{a^3+b^3+c^3-3abc}}$，$y=\pm\dfrac{b^2-ca}{\sqrt{a^3+b^3+c^3-3abc}}$，$z=\pm\dfrac{c^2-ab}{\sqrt{a^3+b^3+c^3-3abc}}$ （複号同順）

　$\cdots⑥$

これらの値を③の左辺に代入すると，$z^2-xy=c$ となり，③を満たすから適する。

[2]　$k=-1$ のとき，①′より，$x^2=\dfrac{a+b}{2}$

$\therefore\ x=\pm\sqrt{\dfrac{a+b}{2}}$，$y=\mp\sqrt{\dfrac{a+b}{2}}$，$z=\pm\dfrac{a-b}{\sqrt{2(a+b)}}$ （複号同順）

これらの値を③の左辺に代入すると，$z^2-xy=\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$

(i)　$z^2-xy=\dfrac{a^2+b^2}{a+b}\neq c$ のとき，③を満たさないから不適である。

(ii)　$z^2-xy=\dfrac{a^2+b^2}{a+b}=c$ のとき，$\dfrac{b^2-ca}{a^2-bc}=-1$ である。

これは，[1] で，$k=\dfrac{b^2-ca}{a^2-bc}=-1$ の場合であるから，⑥の形で解は表される。

よって，[1]，[2] より，

$x=\pm\dfrac{a^2-bc}{\sqrt{a^3+b^3+c^3-3abc}}$，$y=\pm\dfrac{b^2-ca}{\sqrt{a^3+b^3+c^3-3abc}}$，$z=\pm\dfrac{c^2-ab}{\sqrt{a^3+b^3+c^3-3abc}}$ （複号同順）答

例1（第428回問題1）$a=2$，$b=3$，$c=4$ のとき，$a^3+b^3+c^3-3abc=2^3+3^3+4^3-3\cdot2\cdot3\cdot4=27$ より，

$x=\pm\dfrac{2^2-3\cdot4}{\sqrt{27}}=\mp\dfrac{8\sqrt{3}}{9}$，$y=\pm\dfrac{3^2-2\cdot4}{\sqrt{27}}=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{9}$，$z=\pm\dfrac{4^2-2\cdot3}{\sqrt{27}}=\pm\dfrac{10\sqrt{3}}{9}$

よって，$(x,\ y,\ z)=\left(\mp\dfrac{8\sqrt{3}}{9},\ \pm\dfrac{\sqrt{3}}{9},\ \pm\dfrac{10\sqrt{3}}{9}\right)$ （複号同順）

例2　$a=3$，$b=4$，$c=5$ のとき，$(x,\ y,\ z)=\left(\mp\dfrac{11}{6},\ \pm\dfrac{1}{6},\ \pm\dfrac{13}{6}\right)$ （複号同順）

例3　$a=8$，$b=9$，$c=10$ のとき，$(x,\ y,\ z)=\left(\mp\dfrac{26}{9},\ \pm\dfrac{1}{9},\ \pm\dfrac{28}{9}\right)$ （複号同順）

（2023/7/3　ジョーカー）