問題1　このままでは扱い難いので、次数を下げてアプローチします。

$$\begin{cases} x^2 - yz = 2 \cdots ① \\ y^2 - zx = 3 \cdots ② \\ z^2 - xy = 4 \cdots ③ \end{cases}$$

とします。① + ② + ③に$x + y + z$を掛けると、

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy) = (x+y+z)(2+3+4)$$

$$\Rightarrow x^3+y^3+z^3-3xyz = 9(x+y+z) \cdots ④$$

また、① × x + ② × y + ③ × zとすると、

$$x^3 - yzx + y^3 - zxy + z^3 - xyz = 2x + 3y + 4z$$

$$\Rightarrow x^3+y^3+z^3-3xyz = 2x+3y+4z \cdots ⑤$$

です。④–⑤とやると、

$$x^3+y^3+z^3-3xyz-(x^3+y^3+z^3-3xyz) = 9(x+y+z)-(2x+3y+4z)$$

$$\Rightarrow 7x+6y+5z = 0 \cdots ⑥$$

となり、1次式が得られます。次に① × y + ② × z + ③ × xとすると、

$$(x^2-yz)y + (y^2-zx)z + (z^2-xy)x = 2y+3z+4x$$

$$\Rightarrow 4x+2y+3z = 0 \cdots ⑦$$

となり、異なる1次式が出てきます。⑥⑦から、x, y, zの比が求まり、実数tに対して、

$$(x, y, z) = (8t, -t, -10t) \cdots ⑧$$

と表すことができます。これらを①に代入して、tを求めると、

$$64t^2 - 10t^2 = 2 \Rightarrow t = \pm\frac{\sqrt{3}}{9}$$

です。よって、求める解は以下の通りです。

$$(x, y, z) = \left(\pm\frac{8\sqrt{3}}{9}, \mp\frac{\sqrt{3}}{9}, \mp\frac{10\sqrt{3}}{9}\right)$$

問題2

$$
\begin{cases}
x^3 - y^3 = 296 \cdots ① \\
y^3 - z^3 = 49.625 \cdots ② \\
z^3 - u^3 = 41.375 \cdots ③ \\
u^3 - w^3 = 33.875 \cdots ④ \\
x + y + z + u + w = 29 \cdots ⑤
\end{cases}
$$

とします。x, yが正の整数なので、ここから、解の存在範囲を絞り込みます。①は、

$$(x - y)(x^2 + yx + y^2) = 2^3 37$$

と分解できます。すると、⑤より$x - y$は37より小さいので1,2,4,8のいずれかになります。さらに式を変形して、解を絞り込みます。

$$\text{上式} = (x - y)((x - y)^2 + 3xy) = 2^3 37 \Rightarrow 3xy = \frac{2^3 37}{x - y} - (x - y)^2$$

すると、左辺は正の 3 の倍数ですが、$x - y = 1,4,8$のときは成り立たないので、$x - y = 2$です。これと①を連立させて解くと、$(x, y) = (8,6), (-6, -8)$ですが、x, yは正なので、$(x, y) = (8,6)$です。後は、芋づる式にやれば良いです。

②に$y = 6$を入れて変形すると、

$$z^3 = 6^3 - \left(49 + \frac{5^4}{10^3}\right) = \left(\frac{11}{2}\right)^3 \Rightarrow z = \frac{11}{2}$$

③に$z = \frac{11}{2}$を入れて変形すると、

$$u^3 = \left(\frac{11}{2}\right)^3 - \left(41 + \frac{3 \cdot 5^3}{10^3}\right) = 5^3 \Rightarrow u = 5$$

④に$u = 5$を入れて変形すると、

$$w^3 = 5^3 - \left(33 + \frac{7 \cdot 5^3}{10^3}\right) = \left(\frac{9}{2}\right)^3 \Rightarrow w = \frac{9}{2}$$

となります。最後に、⑤式に$(x, y, z, y, w) = \left(8,6,\frac{11}{2},5,\frac{9}{2}\right)$を代入すると、

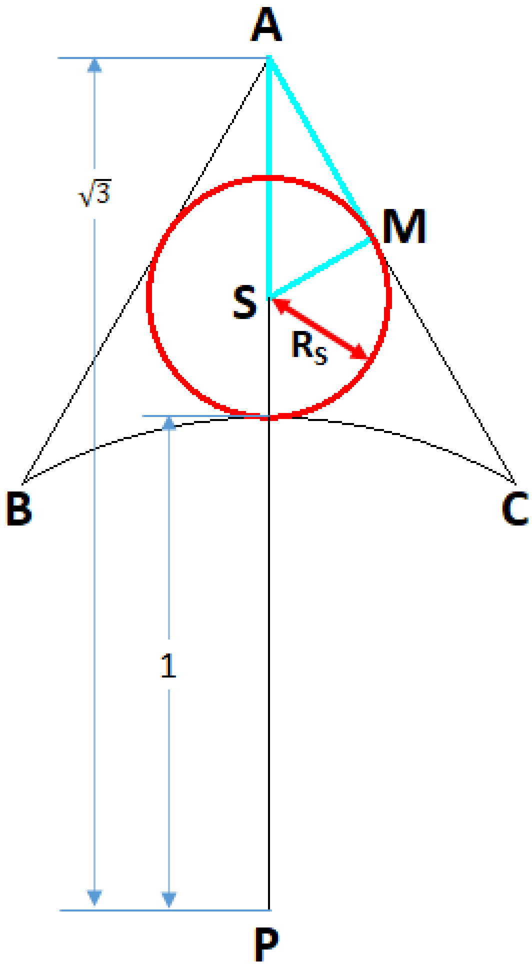
$$x + y + z + u + w = 8 + 6 + \frac{11}{2} + 5 + \frac{9}{2} = 29$$

ですから、求めた(x, y, z, y, w)は解であることが担保できます。

以上より、求める解は、$(x, y, z, y, w) = \left(8,6,\frac{11}{2},5,\frac{9}{2}\right)$です。

追加問題1

・甲の半径について



左図のように点をとって補助線を入れます。点Sは甲の中心、点Mは点Sから線分ACへの垂点、点Pは弧BCの中心です。

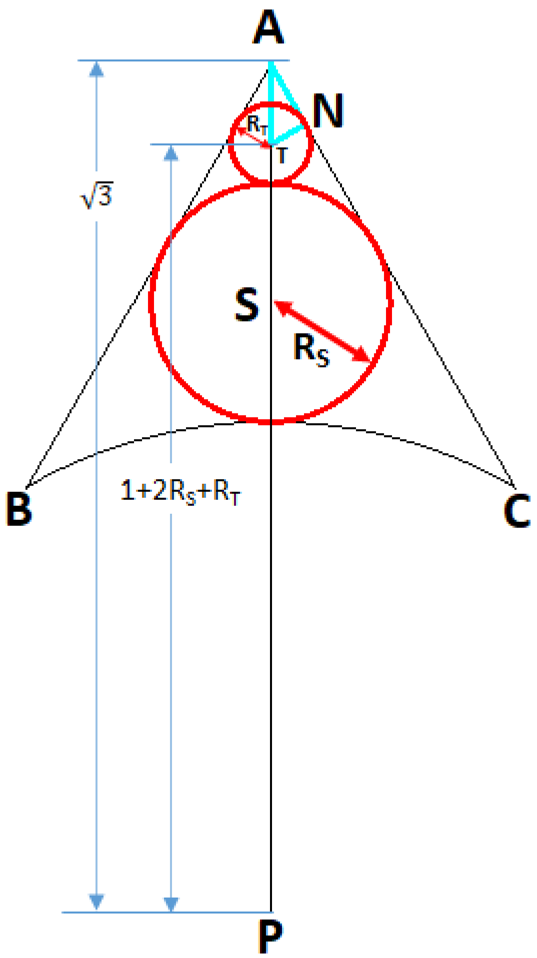
すると、△ASM は各角が$30°, 60°, 90°$の直角三角形なので、甲の半径R_sとすれば、

$$\frac{\sqrt{3}-(1+R_s)}{2}=R_s$$

です。これを解いて、$R_s=\frac{\sqrt{3}-1}{3}$となります。よって、

甲の半径$=\frac{\sqrt{3}-1}{3}$です。

・乙の半径について



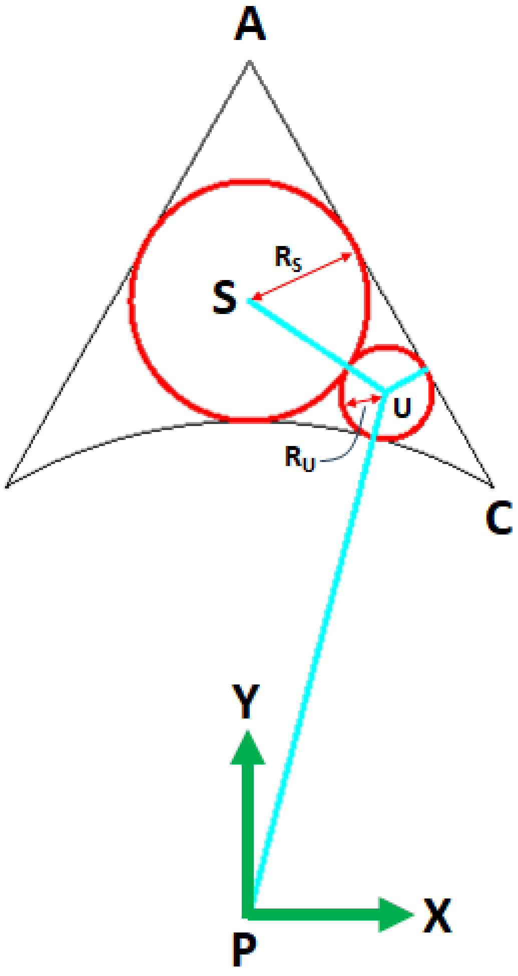
左図のように点をとって補助線を入れます。点 T は乙の中心、点 N は点 T から線分 AC への垂点、点 P は弧 BC の中心です。

すると、△ATN は各角が$30°, 60°, 90°$の直角三角形なので、乙の半径R_Tとすれば、

$$\frac{\sqrt{3}-(1+2R_S+R_T)}{2}=R_T$$

です。$R_S=\frac{\sqrt{3}-1}{3}$を代入して解くと、$R_S=\frac{\sqrt{3}-1}{9}$となります。よって、乙の半径$=\frac{\sqrt{3}-1}{9}$です。

・丙の半径について



良いやり方が見つからなかったので、無理矢理答えを出しました。

左図のように、点 P に緑色の座標系を導入すると、直線 AC の方程式は$\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}=0$、乙の中心 S は

$$(0,1+R_S)=\left(0,\frac{2+\sqrt{3}}{3}\right)$$

です。

丙の中心 U(x, y)、半径をR_Uとすると、線分 PU の長さは$1+R_U$なので、

$$x^2+y^2=(1+R_U)^2 \cdots ①$$

です。また、線分 SU の長さは$R_S+R_U=\frac{\sqrt{3}-1}{3}+R_U$なので、

$$x^2+\left(y-\frac{2+\sqrt{3}}{3}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{3}-1}{3}+R_U\right)^2 \cdots ②$$

そして、点 U と直線 AC の距離はR_Uなので、

$$\frac{|\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}|}{2}=R_U \cdots ③$$

です。

①②③を解いて、

$$R_U=\frac{2651-1064\sqrt{2}\sqrt{3}+1885\sqrt{3}-1716\sqrt{2}}{9409}$$

です。よって、丙の半径は$\frac{2651-1064\sqrt{2}\sqrt{3}+1885\sqrt{3}-1716\sqrt{2}}{9409}$です。

参考までに、上記の計算過程を記述しておきます。地道にやれば、答えは出ますが、工夫すると、計算が少し楽になります。
まず、② − ①とやって、次数を下げると、

$$-6\left(\sqrt{3}+2\right)y+4\sqrt{3}+7=6\left(\sqrt{3}-4\right)R_U-2\sqrt{3}-5\cdots ④$$

です。
次に、③の絶対値を場合分けして外します。

$\frac{\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}}{2}=R_U$の場合
④と連立させて、解くと、

$$\begin{cases} x=\dfrac{(18-9\sqrt{3})Ru-\sqrt{3}+3}{3} \\ y=(11-6\sqrt{3})Ru+1 \end{cases}$$

①に代入して、R_Uについて解くと、

$$R_U=\frac{3\sqrt{3}+5}{3}>1（不適）$$

です。

$-\frac{\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}}{2}=R_U$の場合
④と連立させて、解くと、

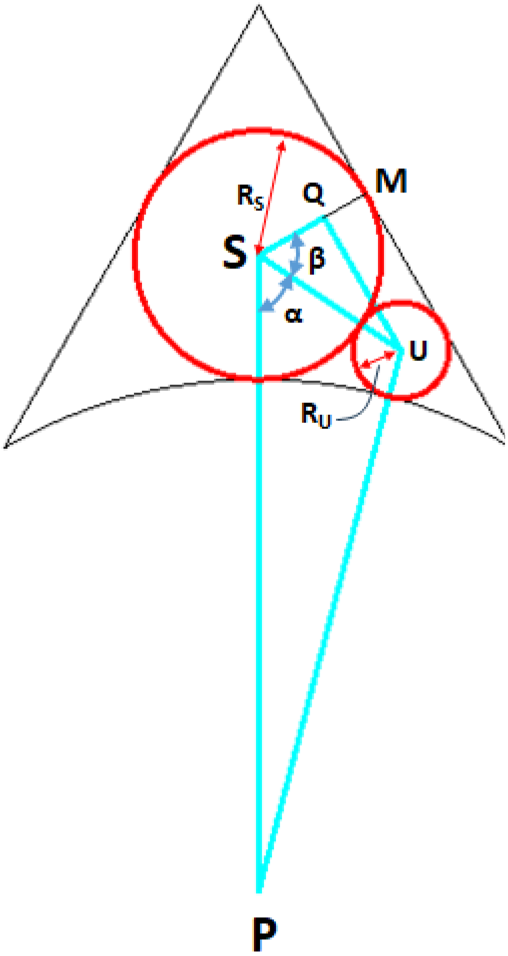
$$\begin{cases} x=\dfrac{(18-13\sqrt{3})Ru-\sqrt{3}+3}{3} \\ y=(11-6\sqrt{3})Ru+1 \end{cases}$$

①に代入して、R_Uについて解くと、

$$R_U=\frac{2651+1064\sqrt{2}\sqrt{3}+1885\sqrt{3}+1716\sqrt{2}}{9409}$$
$$>1（不適）$$
$$R_U=\frac{2651-1064\sqrt{2}\sqrt{3}+1885\sqrt{3}-1716\sqrt{2}}{9409}$$

です。

・丙の半径について（別解）



少しはマシなやり方を思い付きました。

左図のように、点を取ります。点 Q は点 U から線分 SM に下した垂点です。また、∠USM= α 、∠PSU= β としておきます。

△PSU に正弦定理を適用すると、

$$\cos\,\alpha\ =\frac{(1+\mathrm{R_U})^2-(1+\mathrm{R_S})^2+(\mathrm{R_S}+\mathrm{R_U})^2}{2(1-\mathrm{R_S})(\mathrm{R_S}+\mathrm{R_U})}$$

$\mathrm{R_s}=\frac{\sqrt{3}-1}{3}$を代入して、整理すると、

$$\cos\,\alpha\ =\frac{3\mathrm{R_U}-\sqrt{3}+1}{3\mathrm{R_U}+\sqrt{3}-1}\cdots①$$

です。また、△USM に正弦定理を適用すると、

$\cos\,\beta$

$$=\frac{(\mathrm{R_S}+\mathrm{R_U})^2-(\mathrm{R_S}-\mathrm{R_U})^2-(\mathrm{R_S}-\mathrm{R_U})^2-(\mathrm{R_S}+\mathrm{R_U})^2}{2(\mathrm{R_S}-\mathrm{R_U})(\mathrm{R_S}+\mathrm{R_U})}$$

整理すると、

$$\cos\,\beta\ =\frac{1-3(6\sqrt{3}-11)\mathrm{R_U}-\sqrt{3}}{3\mathrm{R_U}+\sqrt{3}-1}\cdots②$$

です。一方、

$$\cos(\,\alpha\ +\ \beta\,)=\cos 120^\circ=-\frac{1}{2}\cdots③$$

です。

①②③を解いて、

$$\mathrm{R_U}=\frac{2651-1064\sqrt{2}\sqrt{3}+1885\sqrt{3}-1716\sqrt{2}}{9409}$$

です。よって、丙の半径は$\frac{2651-1064\sqrt{2}\sqrt{3}+1885\sqrt{3}-1716\sqrt{2}}{9409}$です。

参考までに、上記の計算過程を記述しておきます。計算を楽にするため、$\cos\alpha$, $\cos\beta$ を次のように表現します。

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{D}}, \cos\beta = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{D}}$$

ここで、

$$\mathrm{A} = 3\mathrm{R_U} - \sqrt{3} + 1, \mathrm{B} = 1 - 3\left(6\sqrt{3} - 11\right)\mathrm{R_U} - \sqrt{3}, \mathrm{D} = 3\mathrm{R_U} + \sqrt{3} - 1 \cdots ④$$

です。すると、

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{1-\mathrm{A}^2}}{\mathrm{D}}, \sin\beta = \frac{\sqrt{1-\mathrm{B}^2}}{\mathrm{D}}$$

なので、これらを③式に適用させると、

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \frac{\mathrm{BA} - \sqrt{\mathrm{D}-\mathrm{B}}\sqrt{\mathrm{B}+\mathrm{D}}\sqrt{\mathrm{D}-\mathrm{A}}\sqrt{\mathrm{A}+\mathrm{D}}}{\mathrm{D}^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2\mathrm{BA} + \mathrm{D}^2 = 2\sqrt{\mathrm{D}-\mathrm{B}}\sqrt{\mathrm{B}+\mathrm{D}}\sqrt{\mathrm{D}-\mathrm{A}}\sqrt{\mathrm{A}+\mathrm{D}}$$

となります。余計な解が入り込みますが、両辺を二乗し平方根を飛ばして、整理すると、

$$\mathrm{D}^2(-4\mathrm{A}^2 - 4\mathrm{BA} - 4\mathrm{B}^2 + 3\mathrm{D}^2) = 0 \Rightarrow -4\mathrm{A}^2 - 4\mathrm{BA} - 4\mathrm{B}^2 + 3\mathrm{D}^2 = 0$$

となります。ここで、④式を代入すると、

$$-4\left(3\mathrm{R_U} - \sqrt{3} + 1\right)^2 - 4\left(1 - 3\left(6\sqrt{3} - 11\right)\mathrm{R_U} - \sqrt{3}\right)\left(3\mathrm{R_U} - \sqrt{3} + 1\right)$$

$$- 4\left(1 - 3\left(6\sqrt{3} - 11\right)\mathrm{R_U} - \sqrt{3}\right)^2 + 3\left(3\mathrm{R_U} + \sqrt{3} - 1\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \left(552\sqrt{3} - 961\right)\mathrm{r}^2 + 2\left(37\sqrt{3} - 61\right)\mathrm{r} + 2(\sqrt{3} - 2) = 0$$

上式を解くと、

$$\mathrm{R_U} = \frac{2651 + 1064\sqrt{2}\sqrt{3} + 1885\sqrt{3} + 1716\sqrt{2}}{9409} > 1\text{（不適）}$$

$$\mathrm{R_U} = \frac{2651 - 1064\sqrt{2}\sqrt{3} + 1885\sqrt{3} - 1716\sqrt{2}}{9409}$$

です。

追加問題2
各家が火事になるケースをすべて洗い出すのは面倒なので、余事象（火事にならないケース）で考えます。すると、

Aが火事 $= 1 - A$が火事にならない
$= 1 - \left(1 - \mathrm{A}\text{ が失火}\right)\left(1 - \mathrm{B}\text{ が失火}\cdot\mathrm{A}\text{ に類焼}\right)\left(1 - \mathrm{C}\text{ が失火}\cdot\mathrm{B}\text{ に類焼}\cdot\mathrm{A}\text{ に類焼}\right)$
$= 1 - (1 - \mathrm{a})(1 - \mathrm{ab})(1 - \mathrm{ab}^2)$

Bが火事 $= 1 - \mathrm{B}$ が火事にならない
$1 - \left(1 - \mathrm{B}\text{ が失火}\right)\left(1 - \mathrm{A}\text{ が失火}\cdot\mathrm{B}\text{ に類焼}\right)\left(1 - \mathrm{C}\text{ が失火}\cdot\mathrm{B}\text{ に類焼}\right)$
$= 1 - (1 - \mathrm{a})(1 - \mathrm{ab})^2$

Cが火事 $= 1 - \mathrm{C}$ が火事にならない
$1 - \left(1 - \mathrm{C}\text{ が失火}\right)\left(1 - \mathrm{B}\text{ が失火}\cdot\mathrm{C}\text{ に類焼}\right)\left(1 - \mathrm{A}\text{ が失火}\cdot\mathrm{B}\text{ に類焼}\cdot\mathrm{C}\text{ に類焼}\right)$
$= 1 - (1 - \mathrm{a})(1 - \mathrm{ab})(1 - \mathrm{ab}^2)$

です。