第 429 回

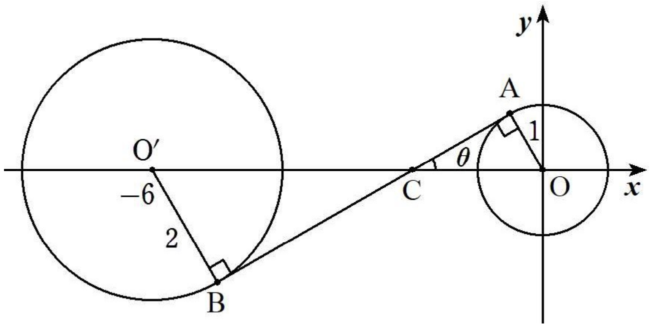
問題　次の問いに答えよ。

(1)　$\dfrac{\sin x+2\sin y}{\cos x+2\cos y+6}$ の最大値を求めよ。

(2)　$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ のとき，$\dfrac{4\sin\theta+2\cos\theta+5}{\sin\theta+\cos\theta+1}$ の最小値を求めよ。

解答

(1)　$\dfrac{\sin x+2\sin y}{\cos x+2\cos y+6}=m$ とおく。



$A(\cos x,\ \sin x)$，$B(-2\cos y-6,\ -2\sin y)$

とおくと，m は直線 AB の傾きを表している。

A は中心 O$(0,\ 0)$，半径 1 の円周上の点，

B は中心 O′$(-6,\ 0)$，半径 2 の円周上の点である。

AB の傾きが最大になるのは，右図のように，

AB が 2 つの円の共通内接線になるときである。

このとき，AB と x 軸との交点を C，$\angle OCA=\theta$ とおくと，m の最大値は，$\tan\theta$ である。

$\triangle OCA \backsim \triangle O'CB$ で，相似比（半径の比）が 1:2 であるから，CO：CO′$=1:2$，CO+CO′$=6$ より，

CO$=2$，CO′$=4$ より，$\sin\theta=\dfrac{OA}{CO}=\dfrac{1}{2}$　$\therefore\ \theta=\dfrac{\pi}{6}$

よって，m の最大値は，$\tan\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 答

等号は，$\angle AOx=\theta+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{2\pi}{3}$ より，$x=\dfrac{2\pi}{3}+2m\pi$，$y=-\dfrac{\pi}{3}+2n\pi$（m，n は整数）のとき。

補足　m の最小値は，$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である。

x 軸に関する A，B の対称点を A′，B′ とすると，A′B′ の傾きが最小となる。

(2)　$\dfrac{4\sin\theta+2\cos\theta+5}{\sin\theta+\cos\theta+1}=f(\theta)$ とおく。

$$f(\theta)=\frac{2(\sin\theta+\cos\theta+1)+2\sin\theta+3}{\sin\theta+\cos\theta+1}=2+\frac{2\sin\theta+3}{\sin\theta+\cos\theta+1}=2+\frac{2}{\dfrac{2\sin\theta+2\cos\theta+2}{2\sin\theta+3}}$$

ここで，$\dfrac{2\sin\theta+2\cos\theta+2}{2\sin\theta+3}$ の符号を調べる。

分母$=2\sin\theta+3>1>0$，分子$=2\sin\theta+2\cos\theta+2=2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)+2$

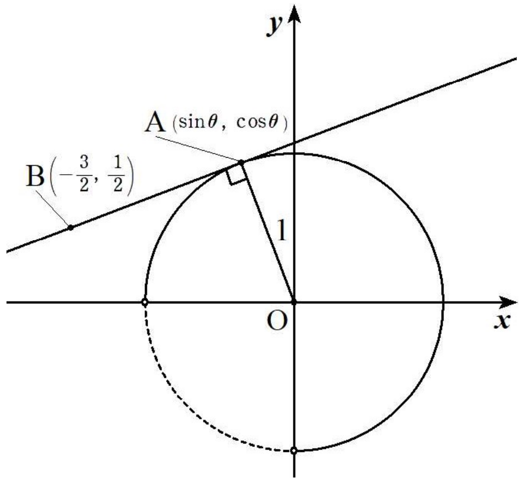
$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ より，$-\dfrac{\pi}{4}<\theta+\dfrac{\pi}{4}<\pi+\dfrac{\pi}{4}$ であるから，$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}<\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$

$\therefore\ 0<2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)+2<2+2\sqrt{2}$　$\therefore$分子>0　従って，$\dfrac{2\sin\theta+2\cos\theta+2}{2\sin\theta+3}>0$である。

さらに $f(\theta)$ を変形すると，

$$f(\theta)=2+\frac{2}{1+\dfrac{2\cos\theta-1}{2\sin\theta+3}}=2+\frac{2}{1+\dfrac{\cos\theta-\frac{1}{2}}{\sin\theta+\frac{3}{2}}}=2+\frac{2}{1+m}$$

$\cdots$①，ここで，$m=\dfrac{\cos\theta-\frac{1}{2}}{\sin\theta+\frac{3}{2}}$ である。



$A(\sin\theta,\ \cos\theta)$，$B\left(-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ とおくと，

m は直線 AB の傾きを表している。

m が最大になるとき，$f(\theta)$ は最小になる。

B は定点で，A は単位円周上の点（右図の実線部分）であるから，傾きが最大になるのは，AB が円の接線になるときである。

直線 AB の方程式を $y-\dfrac{1}{2}=m\left(x+\dfrac{3}{2}\right)$ とおく。

移項すると，$m\left(x+\dfrac{3}{2}\right)-y+\dfrac{1}{2}=0$

これと原点 $(0,\ 0)$ との距離が 1 であるから，$\dfrac{\left|\dfrac{3}{2}m+\dfrac{1}{2}\right|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$ $\quad\therefore\ m=\dfrac{-3\pm2\sqrt{6}}{5}$

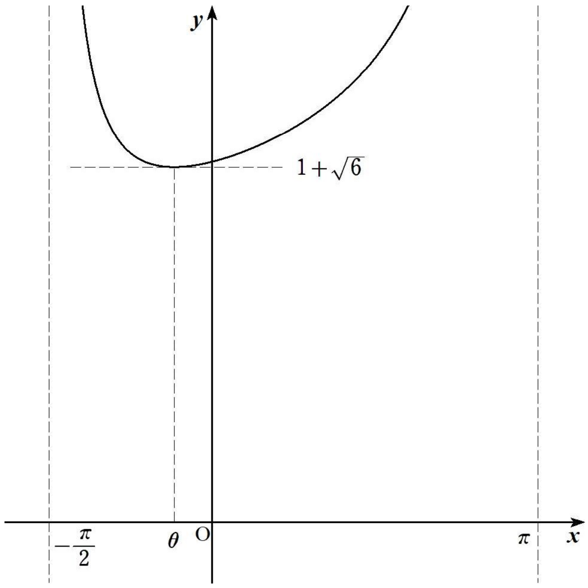
$m>0$ より，$m=\dfrac{-3+2\sqrt{6}}{5}$ $\quad\cdots$②

よって，求める最小値は，②を①に代入して，$f(\theta)=2+\dfrac{2}{1+\dfrac{-3+2\sqrt{6}}{5}}=1+\sqrt{6}$ 答

②のとき，接点は$A\left(\dfrac{-6+\sqrt{6}}{10},\ \dfrac{2+3\sqrt{6}}{10}\right)$となるから，$\sin\theta=\dfrac{-6+\sqrt{6}}{10}$，$\cos\theta=\dfrac{2+3\sqrt{6}}{10}$ のとき。

補足　最小になるときの θ の近似値は，$\theta\fallingdotseq-0.362969$ ラジアン（$\theta\fallingdotseq-20.7966^\circ$）

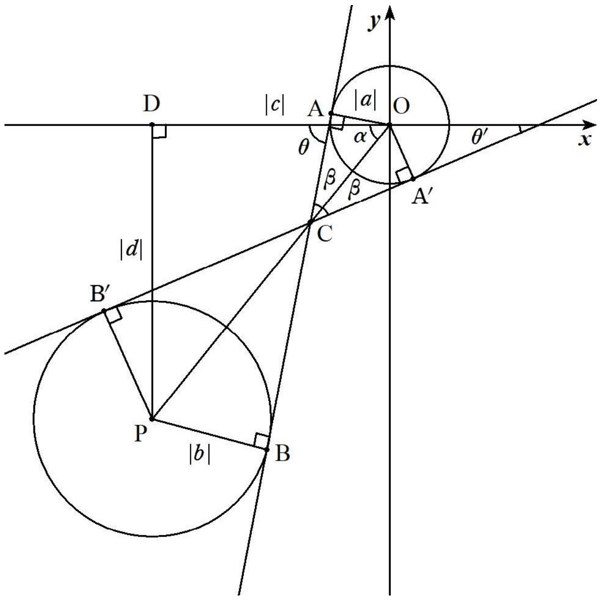
$y=\dfrac{4\sin x+2\cos x+5}{\sin x+\cos x+1}$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\pi\right)$ のグラフ



(2023/7/23　ジョーカー)

（問題１の一般化）

$c^2>(|a|+|b|)^2$ のとき，$\dfrac{a\sin x+b\sin y+d}{a\cos x+b\cos y+c}$ の最大・最小値を求めよ。



解答 $\dfrac{a\sin x+b\sin y+d}{a\cos x+b\cos y+c}=m$，

$A(a\cos x,\ a\sin x)$，$B(-b\cos y-c,\ -b\sin y-d)$

とおくと，m は直線 AB の傾きを表す。

A は O(0, 0) を中心，半径 $|a|$ の円周上の点，

B は $P(-c,\ -d)$ を中心，半径 $|b|$ の円周上の点であるから，

右図で，m の最大値は共通内接線 AB の傾き，

最小値は A′B′ の傾きである。

AB と x 軸とのなす角を θ，A′B′ と x 軸とのなす角を θ'

とすると，最大値 $\tan\theta$ ：，最小値：$\tan\theta'$ である。

AB と OP の交点を C，P から x 軸に下した垂線の足を D とし，

$\angle\mathrm{POD}=\alpha$，$\angle\mathrm{OCA}=\angle\mathrm{OCA}=\beta$ とおくと，

$\mathrm{OD}=|c|$，$\mathrm{DP}=|d|$ より，$\tan\alpha=\dfrac{|d|}{|c|}$

また，△OCA∽△PCB で相似比（半径比）は $|a|:|b|$，$\mathrm{CO}+\mathrm{CP}=\sqrt{c^2+d^2}$ であるから，$\mathrm{CO}=\dfrac{|a|\sqrt{c^2+d^2}}{|a|+|b|}$ より，

$$\sin\beta=\frac{OA}{CO}=\frac{|a|+|b|}{\sqrt{c^2+d^2}}\qquad\therefore\ \tan\beta=\frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\sin^2\beta}}=\frac{|a|+|b|}{\sqrt{c^2+d^2-(|a|+|b|)^2}}$$

$\theta=\alpha+\beta$，$\theta'=\alpha-\beta$ であるから，

[1] 最大値

$$\tan\theta=\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\dfrac{|d|}{|c|}+\dfrac{|a|+|b|}{\sqrt{c^2+d^2-(|a|+|b|)^2}}}{1-\dfrac{|d|}{|c|}\cdot\dfrac{|a|+|b|}{\sqrt{c^2+d^2-(|a|+|b|)^2}}}$$

$$=\frac{|cd|+(|a|+|b|)\sqrt{c^2+d^2-(|a|+|b|)^2}}{c^2-(|a|+|b|)^2}$$ 答

このとき，x，y の値は，$x=\theta+\dfrac{\pi}{2}+2m\pi$，$y=\theta-\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$（$m$，$n$ は整数）

[2] 最小値

$$\tan\theta'=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\dfrac{|d|}{|c|}-\dfrac{|a|+|b|}{\sqrt{c^2+d^2-(|a|+|b|)^2}}}{1+\dfrac{|d|}{|c|}\cdot\dfrac{|a|+|b|}{\sqrt{c^2+d^2-(|a|+|b|)^2}}}$$

$$=\frac{|cd|-(|a|+|b|)\sqrt{c^2+d^2-(|a|+|b|)^2}}{c^2-(|a|+|b|)^2}$$ 答

このとき，x，y の値は，$x=\theta'-\dfrac{\pi}{2}+2m\pi$，$y=\theta'+\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$（$m$，$n$ は整数）

例（問題１） $a=1.\ b=2,\ c=6,\ d=0$ のとき，条件 $c^2>(|a|+|b|)^2$ を満たす。

よって，最大値：$\dfrac{|cd|+(|a|+|b|)\sqrt{c^2+d^2-(|a|+|b|)^2}}{c^2-(|a|+|b|)^2}=\dfrac{(1+2)\sqrt{6^2-(1+2)^2}}{6^2-(1+2)^2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 答

このとき，$x,\ y$ の値は，$\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ であるから，

$x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2}+2m\pi=\dfrac{2\pi}{3}+2m\pi$， $y=\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{2}+2n\pi=-\dfrac{\pi}{3}+2n\pi$ （$m,\ n$ は整数）のとき。

（2023/7/31　ジョーカー）

(2)　$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ のとき，$\dfrac{4\sin\theta+2\cos\theta+5}{\sin\theta+\cos\theta+1}$ の最小値を求めよ。

別解 1

$\dfrac{4\sin\theta+2\cos\theta+5}{\sin\theta+\cos\theta+1}=m$，A$(\sin\theta+\cos\theta,\ 4\sin\theta+2\cos\theta)$，B$(-1,\ -5)$

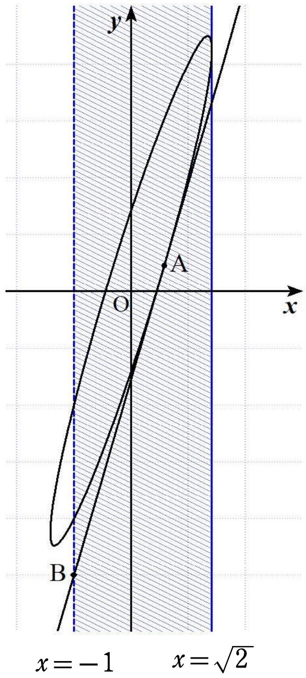
とおくと，m は直線 AB の傾きを表す。B は第３象限の定点である。

$x=\sin\theta+\cos\theta$，$y=4\sin\theta+2\cos\theta$ とおくと，

$2x-y=-2\sin\theta$，$4x-y=2\cos\theta$ であるから，

$(2x-y)^2+(4x-y)^2=(-2\sin\theta)^2+(2\cos\theta)^2=4$

$\therefore\ 10x^2-6xy+y^2=2$　…①　これは右図のような楕円を表す。(*)



ただし，$x=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ と変形でき，

$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ であるから，$-\dfrac{\pi}{4}<\theta+\dfrac{\pi}{4}<\pi+\dfrac{\pi}{4}$ より，$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}<\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$

$\therefore\ -1<x\leqq\sqrt{2}$　…②

A は②の範囲内の①上の点である。

直線 AB が楕円に接するとき，AB の傾き m は最小となる。

直線 AB の方程式を $y+5=m(x+1)$　…③とおく。

$y=mx+m-5$ を，①に代入すると，$10x^2-6x(mx+m-5)+(mx+m-5)^2=2$

整理すると，$(m^2-6m+10)x^2+2(m^2-8m+15)x+m^2-10m+23=0$　…④

④の判別式を D とおくと，①と②は接するから $D=0$ である。

$\dfrac{D}{4}=(m^2-8m+15)^2-(m^2-6m+10)(m^2-10m+23)$

$=(m^2-8m+15)^2-(m^2-8m+2m+10)(m^2-8m-2m+23)$

$=(m^2-8m)^2+30(m^2-8m)+225-(m^2-8m)^2-33(m^2-8m)-(2m+10)(-2m+23)$

$=m^2-2m-5=0$ より，$m=1\pm\sqrt{6}$

$m>0$ より，$m=1+\sqrt{6}$

このとき，A$\left(\dfrac{-2+2\sqrt{6}}{5},\ -2+\sqrt{6}\right)=(\sin\theta+\cos\theta,\ 4\sin\theta+2\cos\theta)$ とおくと，

$\sin\theta=\dfrac{-6+\sqrt{6}}{10}$，$\cos\theta=\dfrac{2+3\sqrt{6}}{10}$

よって，この式を満たす θ （$-\frac{\pi}{2}<\theta<0$）のとき，最小値 $1+\sqrt{6}$　答

(＊)　$10x^2-6xy+y^2=2$ のグラフについて

解答　y について解くと，$y=3x\pm\sqrt{2-x^2}$ （定義域：$-\sqrt{2}\leqq x\leqq\sqrt{2}$ ）

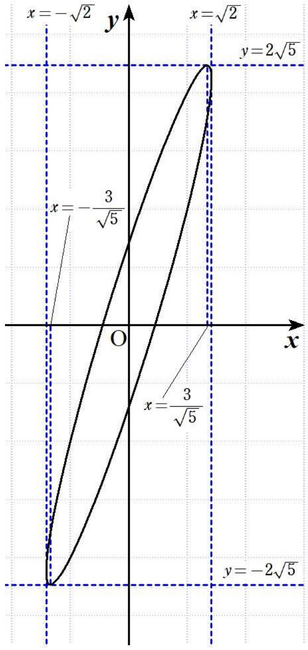
[1]　$y=3x-\sqrt{2-x^2}$ のとき，$y'=3+\dfrac{x}{\sqrt{2-x^2}}=0$ より，$x=-\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

x	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$-\frac{3}{\sqrt{5}}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
y'	$-\infty$	$-$	0	$+$	∞
y	$-3\sqrt{2}$	↘	$-2\sqrt{5}$	↗	$3\sqrt{2}$

[2]　$y=3x+\sqrt{2-x^2}$ のとき，$y'=3-\dfrac{x}{\sqrt{2-x^2}}=0$ より，$x=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

x	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{\sqrt{5}}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
y'	∞	$+$	0	$-$	$-\infty$
y	$-3\sqrt{2}$	↗	$2\sqrt{5}$	↘	$3\sqrt{2}$

よって，グラフは，右図のようになる。



別解　$ax^2+2hxy+by^2=c$ を原点中心に θ だけ回転させて，$Ax^2+By^2=c$ になったとすると，

回転角 θ（$0<\theta<\frac{\pi}{2}$）は，[1]　$a\fallingdotseq b$ のとき，$\tan 2\theta=-\dfrac{2h}{a-b}$，[2]　$a=b$ のとき，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

このとき，$A+B=a+b$，$AB=ab-h^2$，$2h(A-B)<0$ から A，B が決まる。

証明　点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を原点中心に θ だけ回転させて，点 $\mathrm{P}'(x',\ y')$ になったとすると，

$x'+y'i=(x+yi)(\cos\theta+i\sin\theta)$，$x+yi=(x'+y'i)(\cos\theta-i\sin\theta)$ であるから，

$x=x'\cos\theta+y'\sin\theta$，$y=-x'\sin\theta+y'\cos\theta$ を $ax^2+2hxy+by^2=c$ に代入したときの x'^2，y'^2，$x'y'$ の係数をそれぞれ A，B，$2H$ とすると，

$$A=a\cos^2\theta-2h\sin\theta\cos\theta+b\sin^2\theta=\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\cos 2\theta-h\sin 2\theta$$

$$B=a\sin^2\theta+2h\sin\theta\cos\theta+b\cos^2\theta=\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\cos 2\theta+h\sin 2\theta$$

$\therefore A+B=a+b$　■

$2H=2a\sin\theta\cos\theta+2h(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-2b\sin\theta\cos\theta=(a-b)\sin 2\theta+2h\cos 2\theta$

$$AB-H^2=\left\{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\cos 2\theta-h\sin 2\theta\right)^2\right\}-\left(\frac{a-b}{2}\sin 2\theta+h\cos 2\theta\right)^2$$

$$=ab-h^2$$　■

$H=0$ とおくと，$(a-b)\sin 2\theta+2h\cos 2\theta=0$　$\cdots$(a)

よって，回転角 θ（$0<\theta<\frac{\pi}{2}$）は，

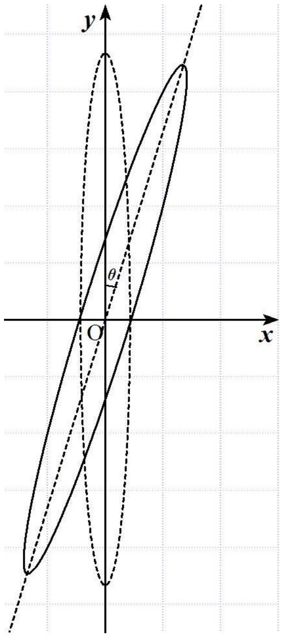
[1]　$a\fallingdotseq b$ のとき，(a) の両辺を $\cos 2\theta$ で割って，$\tan 2\theta=-\dfrac{2h}{a-b}$

[2]　$a=b$ のとき，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$　■

$A-B=(a-b)\cos 2\theta-2h\sin 2\theta$

両辺に $2h$ を掛けると，

$2h(A-B)=(a-b)\cdot 2h\cos 2\theta-(2h)^2\sin 2\theta=-\{(a-b)^2+(2h)^2\}\sin 2\theta$ （$\because$(a)）<0 （$\because \sin 2\theta>0$） 終



例　$10x^2-6xy+y^2=2$ のとき，原点中心に θ （$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ ）だけ回転させて，

$Ax^2+By^2=2$ になったとすると，

回転角 θ は，$\tan 2\theta=-\dfrac{-6}{10-1}=\dfrac{2}{3}$　$\therefore \tan\theta=\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}$

$A+B=10+1=11$，$AB=10\cdot 1-(-3)^2=1$，$-6(A-B)<0$ より，$A>B$ より，

$A=\dfrac{11+3\sqrt{13}}{2}$，$B=\dfrac{11-3\sqrt{13}}{2}$

このとき，$\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{\sqrt{13}-3}{\sqrt{2}}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\dfrac{\sqrt{13}+3}{\sqrt{2}}\right)^2}=1$ （楕円）となる。

(2)　別解2

$y=\dfrac{4\sin\theta+2\cos\theta+5}{\sin\theta+\cos\theta+1}$ とおく。

$\tan\dfrac{\theta}{2}=t$ とおくと，$\sin\theta=\dfrac{2t}{1+t^2}$，$\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

これを与式に代入して整理すると，$y=\dfrac{3t^2+8t+7}{2t+2}=\dfrac{1}{2}\left(3t+5+\dfrac{2}{t+1}\right)=\dfrac{1}{2}\left\{2+3(t+1)+\dfrac{2}{t+1}\right\}$　…①

ここで，$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ より，$-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ であるから，$t=\tan\dfrac{\theta}{2}>-1$　$\therefore t+1>0$

$3(t+1)>0$，$\dfrac{2}{t+1}>0$ より，相加・相乗平均の関係により，

$\dfrac{3(t+1)+\dfrac{2}{t+1}}{2}\geqq\sqrt{3(t+1)\cdot\dfrac{2}{t+1}}=\sqrt{6}$　$\therefore 3(t+1)+\dfrac{2}{t+1}\geqq 2\sqrt{6}$

これを①に適用すると，$y\geqq\dfrac{1}{2}(2+2\sqrt{6})=1+\sqrt{6}$

等号は，$3(t+1)=\dfrac{2}{t+1}$ のとき。$t+1=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　$\therefore t=\dfrac{-3+\sqrt{6}}{3}$

このとき，$\sin\theta=\dfrac{2t}{1+t^2}=\dfrac{-6+\sqrt{6}}{10}$，$\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}=\dfrac{2+3\sqrt{6}}{10}$ である。

よって，　$\sin\theta=\dfrac{-6+\sqrt{6}}{10}$，$\cos\theta=\dfrac{2+3\sqrt{6}}{10}$ を満たす θ （$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<0$）のとき，最小値 $1+\sqrt{6}$　答

(2)　別解3

$y=\dfrac{4\sin\theta+2\cos\theta+5}{\sin\theta+\cos\theta+1}$ とおく。

$\tan\dfrac{\theta}{2}=t$ とおくと，$\sin\theta=\dfrac{2t}{1+t^2}$，$\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

これを与式に代入して整理すると，$y=\dfrac{3t^2+8t+7}{2t+2}$

分母を払って t について整理すると，$3t^2+2(4-y)t+7-2y=0$　…①

この t についての２次方程式の判別式を D とすると，実数解をもつから，$D\geqq 0$ である。

$\dfrac{D}{4}=(4-y)^2-3(7-2y)=y^2-2y-5\geqq 0$ より，$y\leqq 1-\sqrt{6}$，$1+\sqrt{6}\leqq y$　…②

ここで，$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ より，$-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ であるから，$t=\tan\dfrac{\theta}{2}>-1$　$\therefore t+1>0$　…③

$y=\dfrac{3t^2+8t+7}{2t+2}=\dfrac{1}{2}\left(3t+5+\dfrac{2}{t+1}\right)=1+\dfrac{3}{2}(t+1)+\dfrac{1}{t+1}>0$（∵③）

$y>0$ より，②は，$1+\sqrt{6}\leqq y$ となる。

$y=1+\sqrt{6}$ のとき，①より，$t=-\dfrac{4-y}{3}=\dfrac{-3+\sqrt{6}}{3}$

$\sin\theta=\dfrac{2t}{1+t^2}=\dfrac{-6+\sqrt{6}}{10}$，$\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}=\dfrac{2+3\sqrt{6}}{10}$

よって，　$\sin\theta=\dfrac{-6+\sqrt{6}}{10}$，$\cos\theta=\dfrac{2+3\sqrt{6}}{10}$ を満たす θ（$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<0$）のとき，最小値 $1+\sqrt{6}$　答

別解4

$y=\dfrac{4\sin\theta+2\cos\theta+5}{\sin\theta+\cos\theta+1}$ とおく。

$\dfrac{dy}{d\theta}=\dfrac{(\sin\theta+\cos\theta+1)(4\cos\theta-2\sin\theta)-(4\sin\theta+2\cos\theta+5)(\cos\theta-\sin\theta)}{(\sin\theta+\cos\theta+1)^2}=\dfrac{3\sin\theta-\cos\theta+2}{(\sin\theta+\cos\theta+1)^2}$

$\dfrac{dy}{d\theta}=0$ とおくと，$3\sin\theta-\cos\theta+2=0$　…①

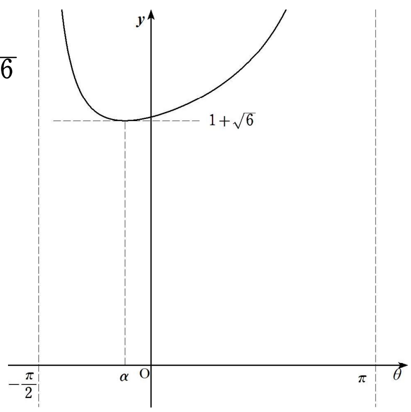
両辺を $\cos\theta$ で割り，移項すると，$3\tan\theta-1=-\dfrac{2}{\cos\theta}$

両辺を２乗すると，$(3\tan\theta-1)^2=4(1+\tan^2\theta)$　$\therefore 5\tan^2\theta-6\tan\theta-3=0$　$\therefore \tan\theta=\dfrac{3\pm 2\sqrt{6}}{5}$　…②

ここで①を変形すると，$3\sin\theta+1=\cos\theta-1\leqq 0$ より，$0\leqq\theta<\pi$ のとき，$\sin\theta\geqq 0$ より，不合理

$\therefore -\dfrac{\pi}{2}<\theta<0$　したがって②から，$\tan\theta=\dfrac{3-2\sqrt{6}}{5}$　これを満たす角を α（$-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<0$）とする。

このとき，$y=\dfrac{4\tan\theta+2+\dfrac{5}{\cos\theta}}{\tan\theta+1+\dfrac{1}{\cos\theta}}=\dfrac{4\tan\theta+2+5\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta+1+\sqrt{1+\tan^2\theta}}=1+\sqrt{6}$



θ	$-\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	α	$\cdots$	π
$\dfrac{dy}{d\theta}$		$-$	0	$+$	
y	∞	↘	$1+\sqrt{6}$	↗	∞

よって，最小値は $1+\sqrt{6}$（$\theta=\alpha$ のとき，$\tan\alpha=\dfrac{3-2\sqrt{6}}{5}$）　答

(2023/7/25　ジョーカー)

（問題２を少し一般化）

$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$，$a<c$，$b<c$ のとき，$\dfrac{a\sin\theta+b\cos\theta+c}{\sin\theta+\cos\theta+1}$ の最小値を求めよ。

解答　$y=\dfrac{a\sin\theta+b\cos\theta+c}{\sin\theta+\cos\theta+1}$ とおき，$\tan\dfrac{\theta}{2}=t$ とおくと，$\sin\theta=\dfrac{2t}{1+t^2}$，$\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

これを与式に代入して整理すると，

$$y=\frac{(c-b)t^2+2at+b+c}{2(t+1)}=\frac{1}{2}\left\{(c-b)t+2a+b-c+\frac{2(c-a)}{t+1}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{2a+2b-2c+(c-b)(t+1)+\frac{2(c-a)}{t+1}\right\}=a+b-c+\frac{(c-b)(t+1)}{2}+\frac{c-a}{t+1}$$

ここで，$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ より，$-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ であるから，$t=\tan\dfrac{\theta}{2}>-1$　$\therefore t+1>0$　…①

また，$c-b>0$，$c-a>0$ であるから，

$$y=a+b-c+\left\{\sqrt{\frac{(c-b)(t+1)}{2}}-\sqrt{\frac{c-a}{t+1}}\right\}^2+2\sqrt{\frac{(c-b)(t+1)}{2}}\sqrt{\frac{c-a}{t+1}}\geqq a+b-c+\sqrt{2(c-a)(c-b)}$$

等号は，$\sqrt{\dfrac{(c-b)(t+1)}{2}}=\sqrt{\dfrac{c-a}{t+1}}$　①より，$t+1=\sqrt{\dfrac{2(c-a)}{c-b}}$　$\therefore t=-1+\sqrt{\dfrac{2(c-a)}{c-b}}$ のとき。

よって，$\tan\dfrac{\theta}{2}=-1+\sqrt{\dfrac{2(c-a)}{c-b}}$ のとき，最小値 $a+b-c+\sqrt{2(c-a)(c-b)}$　答

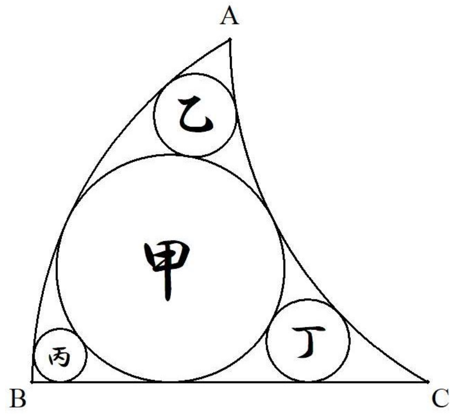
例　$a=4$，$b=2$，$c=5$ の場合

$\tan\dfrac{\theta}{2}=-1+\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{-3+\sqrt{6}}{3}$ のとき，最小値 $4+2-5+\sqrt{2\cdot1\cdot3}=1+\sqrt{6}$　答

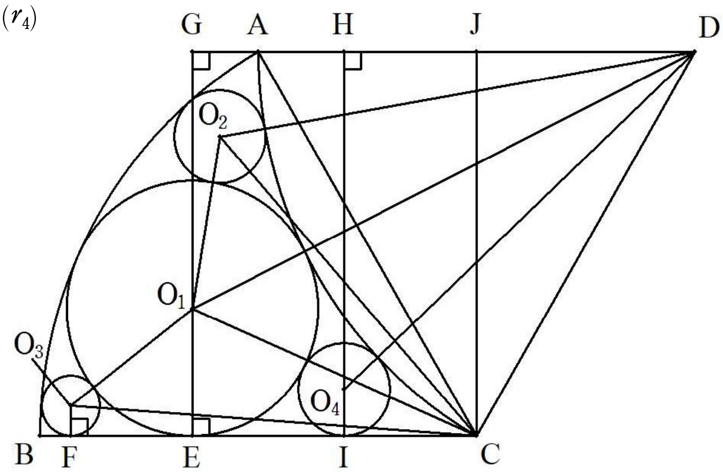
（2023/7/26　ジョーカー）

追加問題１

A，B，Cは１辺の長さが１の正三角形の頂点で，
弧 CA，AB は半径１の円弧である。
図のようにこの図形の中に，互いに接する甲乙丙丁円を配置する。
甲乙丙丁円の半径をそれぞれ求めよ。



解答　甲乙丙丁円を $O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$，$O_3(r_3)$，$O_4(r_4)$ とおき，図のように記号を付ける。



(r_1)

$\triangle O_1CE$ に三平方の定理を適用して，

$EC=\sqrt{(1-r_1)^2-r_1{}^2}=\sqrt{1-2r_1}$

$GD=GJ+ID=EC+JD=\sqrt{1-2r_1}+\dfrac{1}{2}$

また，$GO_1=GE-O_1E=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-r_1$，$O_1D=r_1+1$

であるから，$\triangle O_1DG$ に三平方の定理を適用して，

$$(r_1+1)^2=\left(\sqrt{1-2r_1}+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-r_1\right)^2$$

展開して移項すると，$(4+\sqrt{3})r_1-1=\sqrt{1-2r_1}$

両辺を２乗して整理すると，$r_1\{(19+8\sqrt{3})r_1-2(3+\sqrt{3})\}=0$

$r_1\neq 0$ より，$r_1=\dfrac{2(3+\sqrt{3})}{19+8\sqrt{3}}=\dfrac{2(33-5\sqrt{3})}{169}$　（$\fallingdotseq 0.288044$）

(r_2)

$\angle CDO_2=\alpha$，$\angle CDO_1=\beta$ とおく。

余弦定理により，$\cos\alpha=\dfrac{1^2+(1+r_2)^2-(1-r_2)^2}{2\cdot 1\cdot(1+r_2)}=\dfrac{1+4r_2}{2(1+r_2)}$，$\cos\beta=\dfrac{1^2+(1+r_1)^2-(1-r_1)^2}{2\cdot 1\cdot(1+r_1)}=\dfrac{1+4r_1}{2(1+r_1)}$，

$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{\sqrt{3(1-4r_2{}^2)}}{2(1+r_2)}$，$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\dfrac{\sqrt{3(1-4r_1{}^2)}}{2(1+r_1)}$

$\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{(1+r_1)^2+(1+r_2)^2-(r_1+r_2)^2}{2(1+r_1)(1+r_2)}=\dfrac{1+r_1+r_2-r_1r_2}{(1+r_1)(1+r_2)}$　これら５式を (*) とおく。

加法定理 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ に (*) を代入すると，

$$\frac{1+r_1+r_2-r_1r_2}{(1+r_1)(1+r_2)}=\frac{1+4r_2}{2(1+r_2)}\cdot\frac{1+4r_1}{2(1+r_1)}+\frac{\sqrt{3(1-4r_2{}^2)}}{2(1+r_2)}\cdot\frac{\sqrt{3(1-4r_1{}^2)}}{2(1+r_1)}$$

両辺に $4(1+r_1)^2(1+r_2)^2$ を掛け，移項すると，$3-20r_1r_2=3\sqrt{(1-4r_1{}^2)(1-4r_2{}^2)}$

両辺を２乗して r_2 について整理すると，$(9+64r_1{}^2)r_2{}^2-30r_1r_2+9r_1{}^2=0$

両辺を $9r_1{}^2$ で割り，$\dfrac{r_2}{3r_1}=x$ とおくと，$(9+64r_1{}^2)x^2-10x+1=0$

$x=\dfrac{5\pm4\sqrt{1-4r_1{}^2}}{9+64r_1{}^2}=\dfrac{r_2}{3r_1}$ より，$r_2=3r_1\cdot\dfrac{5\pm4\sqrt{1-4r_1{}^2}}{9+64r_1{}^2}$

$r_1=\dfrac{2(33-5\sqrt{3})}{169}$ のとき，$\sqrt{1-4r_1{}^2}=\dfrac{55+48\sqrt{3}}{169}$，$\dfrac{1}{9+64r_1{}^2}=\dfrac{185011+28160\sqrt{3}}{3345483}$ であるから，

$r_2=\dfrac{2(75-23\sqrt{3})}{673}$ （$\fallingdotseq 0.104496$），$r_2=\dfrac{6(105+19\sqrt{3})}{1657}$ （$\fallingdotseq 0.499369$）

題意に適するのは，$r_2=\dfrac{2(75-23\sqrt{3})}{673}$

(r_3)

$\triangle CO_3F$ について，$CO_3=1-r_3$，$O_3F=r_3$ であるから三平方の定理により，$FC=\sqrt{(1-r_3)^2-r_3{}^2}=\sqrt{1-2r_3}$，

$\triangle CO_1E$ について，$CO_1=1-r_1$，$O_1E=r_1$ であるから三平方の定理により，$EC=\sqrt{(1-r_1)^2-r_1{}^2}=\sqrt{1-2r_1}$，

$FE=2\sqrt{r_1r_3}$ である。

FC−EC=FEより，$\sqrt{1-2r_3}-\sqrt{1-2r_1}=2\sqrt{r_1r_3}$ $\cdots$②

ここで，$1-2r_1=a$，$1-2r_3=b$ とおくと，$r_1=\dfrac{1-a}{2}$，$r_3=\dfrac{1-b}{2}$ であるから，

$2\sqrt{r_1r_3}=\sqrt{(1-a)(1-b)}$ より，②は，$\sqrt{b}-\sqrt{a}=\sqrt{(1-a)(1-b)}$

両辺を２乗すると，$b+a-2\sqrt{ab}=(1-a)(1-b)$

整理すると，$(2-a)b-2\sqrt{ab}-(1-2a)=0$

$\sqrt{b}=\dfrac{\sqrt{a}\pm\sqrt{2}(1-a)}{2-a}$ $\therefore b=\dfrac{2-3a+2a^2\pm2\sqrt{2}\sqrt{a}(1-a)}{(2-a)^2}=1-2r_3$ より，

$r_3=\dfrac{1}{2}\left\{1-\dfrac{2-3a+2a^2\pm2\sqrt{2}\sqrt{a}(1-a)}{(2-a)^2}\right\}=\dfrac{(1-a)(2+a\mp2\sqrt{2}\sqrt{a})}{2(2-a)^2}$

ここで，$r_1=\dfrac{2(33-5\sqrt{3})}{168}$ であるから，$a=1-2r_1=\dfrac{37+20\sqrt{3}}{169}$，$\sqrt{a}=\dfrac{5+2\sqrt{3}}{13}$，

$\dfrac{1}{(2-a)^2}=\left(\dfrac{301+20\sqrt{3}}{529}\right)^2=\dfrac{91801+12040\sqrt{3}}{279841}$ より，複号を別々に代入計算すると，

$r_3=\dfrac{2(37275-12630\sqrt{2}+1185\sqrt{3}-4906\sqrt{6})}{279841}$ （$\fallingdotseq 0.0675295$）

$r_3=\dfrac{2(37275+12630\sqrt{2}+1185\sqrt{3}+4906\sqrt{6})}{279841}$ （$\fallingdotseq 0.49461$）

題意に適するのは，$r_3=\dfrac{2(37275-12630\sqrt{2}+1185\sqrt{3}-4906\sqrt{6})}{279841}$ （$\fallingdotseq 0.0675295$）

(r_3) 別解

$\angle O_1CE=\gamma$，$\angle O_3CF=\delta$ とおくと，

$\cos(\gamma-\delta)=\cos\gamma\cos\delta+\sin\gamma\sin\delta=\dfrac{(1-r_1)^2+(1-r_3)^2-(r_1+r_3)^2}{2(1-r_1)(1-r_3)}=\dfrac{1-r_1-r_3-r_1r_3}{(1-r_1)(1-r_3)}$ $\cdots$③

$\sin\gamma=\dfrac{r_1}{1-r_1}$，$\cos\gamma=\sqrt{1-\sin^2\gamma}=\dfrac{\sqrt{1-2r_1}}{1-r_1}$

また，$\sin\delta = \dfrac{r_3}{1-r_3}$，$\cos\delta = \sqrt{1-\sin^2\delta} = \dfrac{\sqrt{1-2r_3}}{1-r_3}$ より，これら 4 式を③に代入すると，

$$\frac{\sqrt{1-2r_1}}{1-r_1}\cdot\frac{\sqrt{1-2r_3}}{1-r_3}+\frac{r_1}{1-r_1}\cdot\frac{r_3}{1-r_3}=\frac{1-r_1-r_3-r_1r_3}{(1-r_1)(1-r_3)}$$

分母を払い，移項すると，$\sqrt{1-2r_1}\sqrt{1-2r_3}=1-r_1-r_3-2r_1r_2$

両辺を 2 乗し，移項すると，$(1+2r_1)^2r_3{}^2-2r_1(3-2r_1)r_3+r_1{}^2=0$

両辺を $r_1{}^2$ で割り，$\dfrac{r_3}{r_1}=x$ とおくと，，$(1+2r_1)^2x^2-2(3-2r_1)x+1=0$

$$x=\frac{3-2r_1\pm2\sqrt{2}\sqrt{1-2r_1}}{(1+2r_1)^2}$$

題意に適するのは，$x=\dfrac{3-2r_1-2\sqrt{2}\sqrt{1-2r_1}}{(1+2r_1)^2}$ $\quad\therefore r_3=\dfrac{r_1(3-2r_1-2\sqrt{2}\sqrt{1-2r_1})}{(1+2r_1)^2}$

$r_1=\dfrac{2(33-5\sqrt{3})}{169}$ のとき，$\sqrt{1-2r_1}=\sqrt{\dfrac{37+20\sqrt{3}}{169}}=\dfrac{5+2\sqrt{3}}{13}$ であるから，

$r_1(3-2r_1-2\sqrt{2}\sqrt{1-2r_1})=\dfrac{2(12075-3510\sqrt{2}-1215\sqrt{3}-1066\sqrt{6})}{28561}$，$\dfrac{1}{(1+2r_1)^2}=\dfrac{91801+12040\sqrt{3}}{279841}$ より，

$$r_3=\frac{2(12075-3510\sqrt{2}-1215\sqrt{3}-1066\sqrt{6})}{28561}\cdot\frac{91801+12040\sqrt{3}}{279841}$$
$$=\frac{2(37275-12630\sqrt{2}+1185\sqrt{3}-4906\sqrt{6})}{279841}\quad(\fallingdotseq 0.0675295)$$

(r_4)

$\mathrm{GH}=\mathrm{EI}=2\sqrt{r_1r_4}$

$\triangle\mathrm{O_1DG}$ に三平方の定理を適用すると，$\mathrm{GD}=\sqrt{(1+r_1)^2-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-r_1\right)^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{1+4(2+\sqrt{3})r_1}$

$\triangle\mathrm{O_4DH}$ に三平方の定理を適用すると，$\mathrm{HD}=\sqrt{(1+r_4)^2-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-r_4\right)^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{1+4(2+\sqrt{3})r_4}$

$\mathrm{GD}-\mathrm{HD}=\mathrm{GH}$ であるから，$\dfrac{1}{2}\sqrt{1+4(2+\sqrt{3})r_1}-\dfrac{1}{2}\sqrt{1+4(2+\sqrt{3})r_4}=2\sqrt{r_1r_4}$

両辺に 2 を掛け，2 乗すると，

$2+4(2+\sqrt{3})r_1+4(2+\sqrt{3})r_4-2\sqrt{1+4(2+\sqrt{3})r_1}\sqrt{1+4(2+\sqrt{3})r_4}=16r_1r_4$

両辺を 2 で割り，移項すると，$1+2(2+\sqrt{3})r_1+2(2+\sqrt{3})r_4-8r_1r_4=\sqrt{1+4(2+\sqrt{3})r_1}\sqrt{1+4(2+\sqrt{3})r_4}$

両辺を 2 乗して r_4 について整理すると，

$\{7+4\sqrt{3}-8(2+\sqrt{3})r_1+16r_1{}^2\}r_4{}^2-2r_1\{9+4\sqrt{3}+4(2+\sqrt{3})r_1\}r_4+(7+4\sqrt{3})r_1{}^2=0$

$$r_4=\frac{r_1\{9+4\sqrt{3}+4(2+\sqrt{3})r_1\pm4\sqrt{2+\sqrt{3}+4(7+4\sqrt{3})r_1}\}}{7+4\sqrt{3}-8(2+\sqrt{3})r_1+16r_1{}^2}$$

$r_1=\dfrac{2(33-5\sqrt{3})}{169}$ のとき，$9+4\sqrt{3}+4(2+\sqrt{3})r_1=\dfrac{1929+860\sqrt{3}}{169}$，

$\sqrt{2+\sqrt{3}+4(7+4\sqrt{3})r_1}=\dfrac{35\sqrt{2}+27\sqrt{6}}{26}$，

$\dfrac{1}{7+4\sqrt{3}-8(2+\sqrt{3})r_1+16r_1{}^2}=\dfrac{136519-30932\sqrt{3}}{552049}$ であるから，

$r_4=\dfrac{2\{181743+34581\sqrt{3}\pm4\sqrt{2}(8181+16966\sqrt{3})\}}{552049}$

近似値を計算すると，$r_4=\dfrac{2(181743-32724\sqrt{2}+34581\sqrt{3}-67864\sqrt{6})}{552049}$ （≒ 0.105527），

$$r_4=\frac{2(181743+32724\sqrt{2}+34581\sqrt{3}+67864\sqrt{6})}{552049}\text{ （≒ 1,64532）}$$

題意に適するのは，前者の方である。

よって，各円の半径は，

甲：$\dfrac{2(33-5\sqrt{3})}{169}$，乙：$\dfrac{2(75-23\sqrt{3})}{673}$，丙：$\dfrac{2(37275-12630\sqrt{2}+1185\sqrt{3}-4906\sqrt{6})}{279841}$，

丁：$\dfrac{2(181743-32724\sqrt{2}+34581\sqrt{3}-67864\sqrt{6})}{552049}$ 答

追加問題２

A，B，Cの３人が１つのさいころをＡＢＣＣＢＡ|ＡＢＣＣＢＡ|ＡＢＣＣＢＡ|Ａ…の順に投げて，最初に１の目を出した人を勝ちとする。A，B，Cが勝つ確率をそれぞれ求めよ。

解答　A，B，Cの勝つ確率をそれぞれ $P(A)$，$P(B)$，$P(C)$ とする。

Aが勝つのは，n を自然数として，$6n-5$，$6n$ 回目である。

$$P(A)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{6(n-1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{5}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{6(n-1)}=\frac{\frac{1}{6}}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{6}}+\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^{5}\cdot\frac{1}{6}}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{6}}=\frac{6^5+5^5}{6^6-5^6}=\frac{991}{2821}$$ 答

Bが勝つのは，n を自然数として，$6n-4$，$6n-1$ 回目である。

$$P(B)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{6(n-1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{4}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{6(n-1)}=\frac{\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{6}}+\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^{4}\cdot\frac{1}{6}}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{6}}=\frac{5\cdot6^4+5^4\cdot6}{6^6-5^6}=\frac{930}{2821}$$

$$=\frac{30}{91}$$ 答

$$P(C)=1-P(A)-P(B)=1-\frac{991}{2821}-\frac{930}{2821}=\frac{900}{2821}$$ 答

（2023/7/24　ジョーカー）