問題1　与式を円と直線の関係で捉えるために、以下の変数変換を施します。

$$\begin{cases} X = \cos(x) + 2\cos(y) \\ Y = \sin(x) + 2\sin(y) \end{cases}$$

すると、x、yは独立した変数なので、X、Yは、

$$-3 \le X \le 3, -3 \le Y \le 3 \cdots ①$$

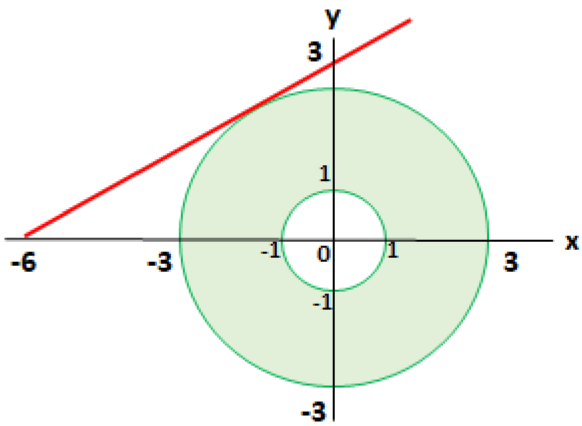
の範囲を動きますが、

$$X^2 + Y^2 = (\cos(x) + 2\cos(y))^2 + (\sin(x) + 2\sin(y))^2 = 4\cos(y - x) + 5$$

$$\Rightarrow 1^2 \le X^2 + Y^2 \le 3^2 \cdots ②$$

なので、X、Yの定義域は円となります。一方、与式を次のように変形すると、定点$(-6,0)$を通る傾きmの直線と考えることができます。

$$与式 = \frac{Y}{X + 6} = m \Rightarrow mX - Y + 6m = 0 \cdots ③$$



これらを図示すると、右のようになります。

直線③は緑円②と接しながら動くので、mが最大となるのは、赤線のように接するときです。

この場合、原点と③との距離が 3 ですから、

$$\frac{6m}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 3 \Rightarrow m = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

となります。よって、与式の最大値は$\frac{1}{\sqrt{3}}$です。

問題 2　前問と同様に与式を円と直線の関係で考えて、変数変換を施します。

$$\begin{cases} x = \cos(\vartheta) \\ y = \sin(\vartheta) \end{cases}$$

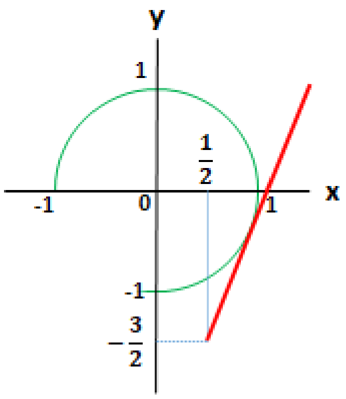
すると、

$$x^2 + y^2 = 1 \cdots ①$$

ですが、$-\frac{\pi}{2} < \vartheta < \pi$なので、定義域は第 3 象限を除いた円となります。

与式は、次のように変形すると、定点$\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$を通る直線となります。

$$\frac{4y + 2x + 5}{y + x + 1} = k \Rightarrow (2 - k)x + (4 - k)y - k + 5 = 0 \cdots ②$$



上式を図示すると、右のようになります。直線②の傾きは、$m = -\frac{k-2}{k-4}$ですから、

$$k = \frac{4m + 2}{m + 1} = 4 - \frac{2}{m + 1}$$

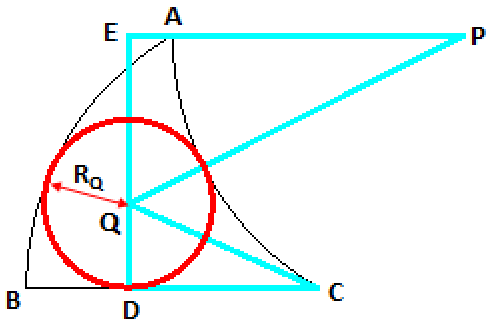
と変形すると、kが最小になるのは、mが正の最小となる場合です。つまり、②が赤線のよう①に接するときで、原点と②との距離が 1 となる場合ですから、

$$\frac{|-k + 5|}{\sqrt{(2 - k)^2 + (4 - k)^2}} = 1 \Rightarrow k = 1 - \sqrt{6}$$

となります。よって、与式の最大値は$1 - \sqrt{6}$です。

追加問題1

・甲の半径について



左図のように点をとって補助線を入れます。点 Q は甲の中心、点 D は点 Q から線分 BC への垂点、点 P は弧 AC の中心、点 E は点 Q から直線 AP への垂点です。

△EPQ と△CDQ に着目します。甲の半径R_Qとして、三平方の定理でCDとEPの長さを求めます。

$$CD=\sqrt{CQ^2-DQ^2}=\sqrt{\left(1-R_Q\right)^2-{R_Q}^2}=\sqrt{1-2R_Q}$$

$$EP=\sqrt{PQ^2-EQ^2}=\sqrt{(R_Q+1)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-R_Q\right)^2}=\frac{\sqrt{(4\sqrt{3}+8)R_Q+1}}{2}$$

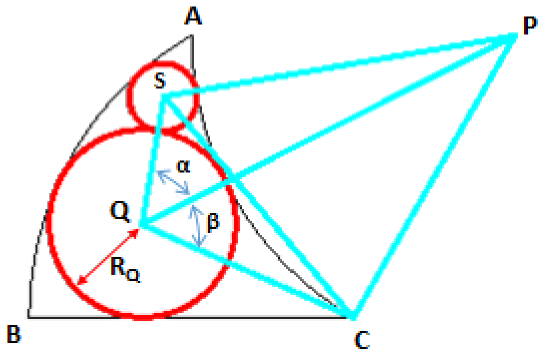
ここで、$EP-CD=\frac{1}{2}$なので、

$$\sqrt{1-2R_Q}-\frac{\sqrt{(4\sqrt{3}+8)R_Q+1}}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow R_Q\left(8\sqrt{3}R_Q+19R_Q-2\sqrt{3}-6\right)=0\Rightarrow R_Q=\frac{2(33-5\sqrt{3})}{169}$$

よって、甲の半径$=\frac{2(33-5\sqrt{3})}{169}$です。

・乙の半径について



左図のように点をとって補助線を入れます。点 Q は甲の中心、点 P は弧 AC の中心、点 S は乙の中心です。

また、$\angle SQP = \alpha$、$\angle CQP = \beta$ とします。

$\triangle PQS$ と$\triangle CPQ$ と$\triangle CPS$ に着目します。甲の半径 R_Q、乙の半径R_Sとして、余弦定理を適用します。

$$\cos\alpha = \frac{(R_Q+1)^2+(R_S+1)^2-(R_Q+R_S)^2}{2(R_Q+1)(R_S+1)}$$

$$\cos\beta = \frac{(R_Q+1)^2+1-(1-R_Q)^2}{2(R_Q+1)}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{(R_S+1)^2+1-(1-R_S)^2}{2(R_S+1)} = \frac{1+4R_S}{2(1+R_S)} \cdots ①$$

上式に、$R_Q = \frac{2(33-5\sqrt{3})}{169}$を入れて整理すると、

$$\cos\alpha = \frac{(4\sqrt{3}+29)R_S+65}{65(1+R_S)} \cdots ②$$

$$\cos\beta = \frac{119-6\sqrt{3}}{130} \cdots ③$$

となります。①②③より(計算過程は汚いので、次ページに記載します)、次の関係式が得られます。

$$(165\sqrt{3}+1094)Rs^2-20(5\sqrt{3}+20)Rs+72=0$$

これを解くと、

$$R_S = \frac{2(75-23\sqrt{3})}{673}, \frac{6(105+19\sqrt{3})}{1657}$$

ですが、甲の半径 $R_Q = \frac{2(33-5\sqrt{3})}{169}$より小さいので、後者は不適です。

よって、乙の半径 $= \frac{2(75-23\sqrt{3})}{673}$です。

参考までに、前ページの計算過程を記載します。実直にやると、計算が煩雑になるので、まず、

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}}, \cos\beta = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{D}}, \cos(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{X}}{\mathrm{Y}}$$

とします。すると、

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{\mathrm{C}^2-\mathrm{A}^2}}{\mathrm{C}}, \sin\beta = \frac{\sqrt{\mathrm{D}^2-\mathrm{B}^2}}{\mathrm{D}}$$

です。ここで、$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$ なので、

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CD}} - \frac{\sqrt{\mathrm{C}^2-\mathrm{A}^2}\sqrt{\mathrm{D}^2-\mathrm{B}^2}}{\mathrm{CD}} = \frac{\mathrm{X}}{\mathrm{Y}}$$

$$\Rightarrow \mathrm{C}^2\mathrm{D}^2\mathrm{Y}^2 - \mathrm{A}^2\mathrm{D}^2\mathrm{Y}^2 - \mathrm{B}^2\mathrm{C}^2\mathrm{Y}^2 - \mathrm{C}^2\mathrm{D}^2\mathrm{X}^2 + 2\mathrm{ABCDXY} = 0 \cdots ④$$

①②③より、

$$\mathrm{A} = (4\sqrt{3}+29)\mathrm{R_S} + 65$$
$$\mathrm{C} = 65(1+\mathrm{R_S})$$
$$\mathrm{B} = 119 - 6\sqrt{3}$$
$$\mathrm{D} = 130$$
$$\mathrm{X} = 1 + 4\mathrm{R_S}$$
$$\mathrm{Y} = 2(1+\mathrm{R_S})$$

なので、これらを④に代入すると、

$$\begin{aligned}-16900(2\mathrm{R_S}+2)^2\left(\mathrm{R_S}(4\sqrt{3}+29)+65\right)^2 - (2\mathrm{R_S}+2)^2(65\mathrm{R_S}+65)^2(119-6\sqrt{3})^2 \\ - 16900(4\mathrm{R_S}+1)^2(65\mathrm{Rs}+65)^2 + 16900(2\mathrm{R_S}+2)^2(65\mathrm{Rs}+65)^2 \\ + 260(2\mathrm{R_S}+2)(4\mathrm{R_S}+1)(65\mathrm{R_S}+65)(119-6\sqrt{3})\left(\mathrm{R_S}(4\sqrt{3}+29)+65\right) = 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{50700(\mathrm{R_S}+1)^2\left((165\sqrt{3}+1094)\mathrm{Rs}^2 - 20(5\sqrt{3}+20)\mathrm{Rs} + 72\right)}{(3\sqrt{3}-14)} = 0$$

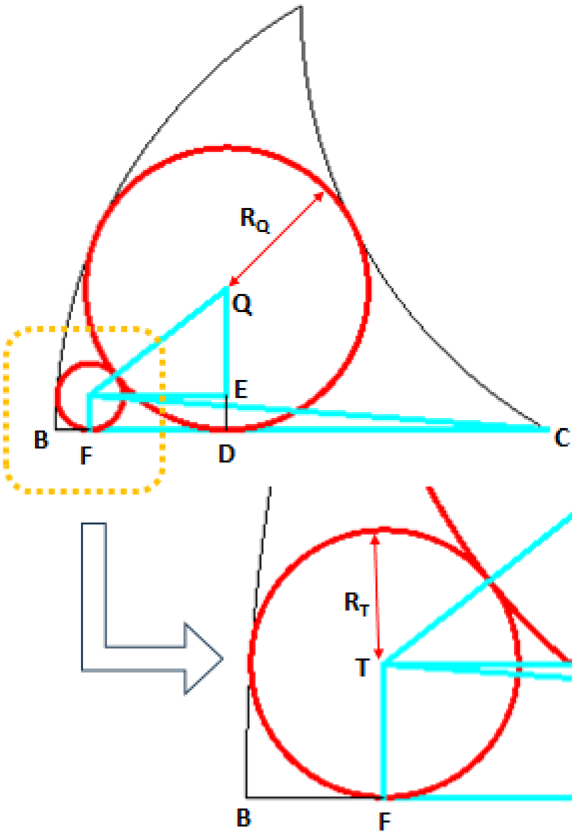
$$\Rightarrow (165\sqrt{3}+1094)\mathrm{Rs}^2 - 20(5\sqrt{3}+20)\mathrm{Rs} + 72 = 0$$

とりあえず、2 次方程式なので、代数学的に解くことができて、

$$\mathrm{R_S} = \frac{2(75-23\sqrt{3})}{673}, \frac{6(105+19\sqrt{3})}{1657}$$

です。

・丙の半径について



左図のように点をとって補助線を入れます。点 Q は甲の中心、点 D は点 Q から線分 BC への垂点、点 T は丙の中心、点 E は点 T から線分 DQ への垂点、点 F は点 T から線分 BC への垂点です。

△EQT と△CFT に着目します。甲の半径$\mathrm{R_Q}$、丙の半径$\mathrm{R_T}$、$\mathrm{DF = L}$として三平方の定理を適用すると、

$$\left(\mathrm{R_T + R_Q}\right)^2 = \left(\mathrm{R_Q - R_T}\right)^2 + \mathrm{L}^2$$

$$\mathrm{R_T}^2 + (\mathrm{L + CD})^2 = (1 - \mathrm{R_T})^2$$

となります。ここで、

$$\mathrm{R_Q} = \frac{2(33 - 5\sqrt{3})}{169}$$

$$\mathrm{CD} = \sqrt{\mathrm{CQ}^2 - \mathrm{DQ}^2} = \sqrt{\left(1 - \mathrm{R_Q}\right)^2 - \mathrm{R_Q}^2}$$

$$= \sqrt{1 - 2\mathrm{R_Q}}$$

なので、これらを代入して整理すると、

$$8\left(5\sqrt{3} - 33\right)\mathrm{R_T} + 169\mathrm{L}^2 = 0 \cdots ①$$

$$338\mathrm{R_T} + 169\mathrm{L}^2 + 26(2\sqrt{3} + 5)\mathrm{L} + 20\sqrt{3} - 132 = 0 \cdots ②$$

となります。これを解くと、

$$\mathrm{R_T} = \frac{2\left(37275 \pm 12630\sqrt{2} + 1185\sqrt{3} \pm 4906\sqrt{2}\sqrt{3}\right)}{279841}$$

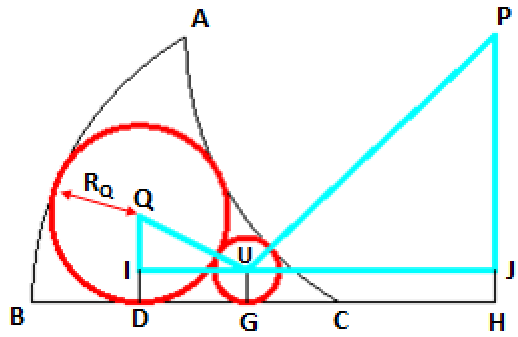
$$\mathrm{L} = \frac{4\left(-255 \mp 741\sqrt{2} - 89\sqrt{3} \pm 65\sqrt{2}\sqrt{3}\right)}{6877}$$

となりますが、$\mathrm{L} > 0$なので有効な解は、

$$\mathrm{R_T} = \frac{2\left(37275 - 12630\sqrt{2} + 1185 - 4906\sqrt{2}\sqrt{3}\right)}{279841}$$

です。よって、丙の半径 $= \frac{2\left(37275 - 12630\sqrt{2} + 1185 - 4906\sqrt{2}\sqrt{3}\right)}{279841}$です。

・丁の半径について



左図のように点をとって補助線を入れます。点 Q は甲の中心、点 D は点 Q から線分 BC への垂点、点 U は丁の中心、点 G は点 U から線分 BC への垂点、点 I は点 U から線分 DQ への垂点です。点 P は弧 AC の中心、点 H は点 P から直線 BC への垂点、点 J は点 U から線分 HP への垂点です。

△IQU と△JPU に着目します。甲の半径R_Q、丁の半径R_U、$DG = L$として三平方の定理を適用すると、

$$\left(R_Q - R_U\right)^2 + L^2 = \left(R_U + R_Q\right)^2$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - R_U\right)^2 + GH^2 = (R_U + 1)^2$$

となります。ここで、

$$R_Q = \frac{2(33 - 5\sqrt{3})}{169}$$

$$CD = \sqrt{CQ^2 - DQ^2} = \sqrt{\left(1 - R_Q\right)^2 - {R_Q}^2} = \sqrt{1 - 2R_Q}$$

$$GH = CD - L + \frac{1}{2} = \sqrt{1 - 2R_Q} - L + \frac{1}{2}$$

なので、これらを代入して整理すると、

$$2\left(20\sqrt{3} - 132\right)R_U + 169L^2 \cdots ①$$

$$169\left(\sqrt{3} + 2\right)R_U - 169L^2 + 13\left(4\sqrt{3} + 23\right)L - 2\left(23\sqrt{3} + 51\right) \cdots ②$$

となります。これを解くと、

$$R_U = \frac{2\left(181743 \pm 32724\sqrt{2} + 34581\sqrt{3} \pm 67864\sqrt{2}\sqrt{3}\right)}{552049}$$

$$L = \frac{4(243 \mp 1248\sqrt{2} - 857\sqrt{3} \mp 130\sqrt{2}\sqrt{3})}{9659}$$

となりますが、$L > 0$なので有効な解は、

$$R_U = \frac{2\left(181743 - 32724\sqrt{2} + 34581\sqrt{3} - 67864\sqrt{2}\sqrt{3}\right)}{552049}$$

です。よって、丁の半径 $= \frac{2\left(181743 - 32724\sqrt{2} + 34581\sqrt{3} - 67864\sqrt{2}\sqrt{3}\right)}{552049}$です。

追加問題2　サイコロをふって、n 回目に初めて1の目が出る確率P_nは、

$$P_n = (1\text{ 以外の目が出る確率})^{n-1} \cdot (1\text{ の目が出る確率}) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6}$$

です。A は 1,6,7,12,・・・回目にサイコロをふることができるので、A が勝つ確率P_Aは、

$$P_A = P_1 + P_6 + P_7 + P_{12} + \cdots = P_1 + P_7 + \cdots + P_6 + P_{12} + \cdots$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{1-1} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^6} + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{6-1} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^6} = \frac{991}{2821}$$

です。B は 2,5,8,11,・・・回目にサイコロをふることができるので、B が勝つ確率P_Bは、

$$P_B = P_2 + P_5 + P_8 + P_{11} + \cdots = P_2 + P_8 + \cdots + P_5 + P_{11} + \cdots$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{2-1} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^6} + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{5-1} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^6} = \frac{30}{91}$$

です。C は 3,4,9,10,・・・回目にサイコロをふることができるので、C が勝つ確率P_cは、

$$P_c = P_3 + P_4 + P_9 + P_{10} + \cdots = P_3 + P_9 + \cdots + P_4 + P_{10} + \cdots$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{3-1} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^6} + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{4-1} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^6} = \frac{900}{2821}$$

です。

以上より、A、B、C が勝つ確率は、それぞれ$\frac{991}{2821}$、$\frac{30}{91}$、$\frac{900}{2821}$です。