

問題1 与式を円と直線の関係で捉えるために、以下の変数変換を施します。

$$\begin{cases} X = \cos(x) + 2\cos(y) \\ Y = \sin(x) + 2\sin(y) \end{cases}$$

すると、 x, y は独立した変数なので、 X, Y は、

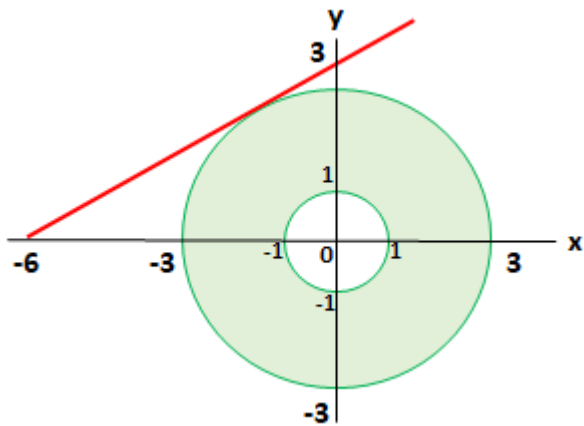
$$-3 \leq X \leq 3, -3 \leq Y \leq 3 \dots \textcircled{1}$$

の範囲を動きますが、

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 &= (\cos(x) + 2\cos(y))^2 + (\sin(x) + 2\sin(y))^2 = 4\cos(y-x) + 5 \\ &\Rightarrow 1^2 \leq X^2 + Y^2 \leq 3^2 \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

なので、 X, Y の定義域は円となります。一方、与式を次のように変形すると、定点 $(-6, 0)$ を通る傾き m の直線と考えることができます。

$$\text{与式} = \frac{Y}{X+6} = m \Rightarrow mX - Y + 6m = 0 \dots \textcircled{3}$$



これらを図示すると、右のようになります。

直線③は緑円②と接しながら動くので、 m が最大となるのは、赤線のように接するときです。

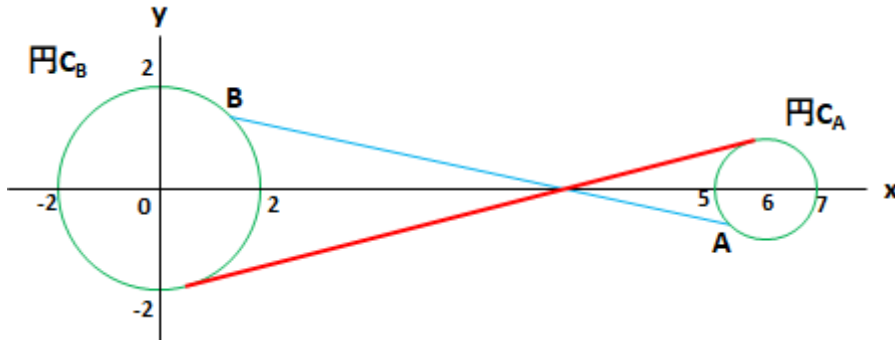
この場合、原点と③との距離が3ですから、

$$\frac{6m}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 3 \Rightarrow m = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

となります。よって、与式の最大値は $\frac{1}{\sqrt{3}}$ です。

問題1 別解 2023/8/3 追記

点A($\cos(x) + 6, \sin(x)$)、点B($-2\cos(y), -2\sin(y)$)とすると、与式は直線 AB の傾きを表します。点Aは中心(6,0)半径1の円周上の点、点Bは中心(0,0)半径2の円周上の点なので、これらを図示すると、以下のようになります。



赤線のように2つの円に接するとき、直線の傾きの最大となります。円C_B上の点(s, t)を通る直線は、

$$sx + ty = 2^2 \dots \textcircled{1}$$

この直線は円C_Aに接して、中心との距離は1ですから、

$$\frac{|s \cdot (-6) + t \cdot 0 - 2^2|}{\sqrt{s^2 + t^2}} = 1 \Rightarrow \frac{|6s + 4|}{2} = 1 \dots \textcircled{2}$$

です。そして、傾きmは、

$$m = -\frac{s}{t} \dots \textcircled{3}$$

です。①②③を解くと、

$$(s, t, m) = \left(-1, \pm\sqrt{3}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(\frac{1}{3}, \pm\frac{\sqrt{35}}{3}, \pm\frac{1}{\sqrt{35}}\right)$$

となりますが、mが最大になるのは、 $(s, t, m) = \left(-1, \sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ です。よって、与式の最大値は $\frac{1}{\sqrt{3}}$ です。

問題 2 前問と同様に与式を円と直線の関係で考えて、変数変換を施します。

$$\begin{cases} x = \cos(\vartheta) \\ y = \sin(\vartheta) \end{cases}$$

すると、

$$x^2 + y^2 = 1 \dots \textcircled{1}$$

ですが、 $-\frac{\pi}{2} < \vartheta < \pi$ なので、定義域は第3象限を除いた円となります。

与式は、次のように変形すると、定点 $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ を通る直線となります。

$$\frac{4y + 2x + 5}{y + x + 1} = k \Rightarrow (2 - k)x + (4 - k)y - k + 5 = 0 \dots \textcircled{2}$$

上式を図示すると、右のようになります。

• $k \neq 4$ の場合

直線②の傾きは、 $m = -\frac{k-2}{k-4} (> -1)$ ですから、

$$k = \frac{4m + 2}{m + 1} = 4 - \frac{2}{m + 1}$$

と変形すると、 k が最小になるのは、 m が正の最小となる場合です。つまり、②が赤線のように①に接するときで、原点と②との距離が1となる場合ですから、

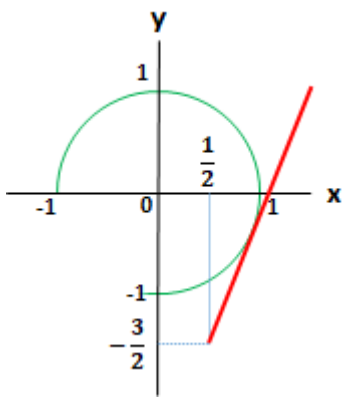
$$\frac{|-k + 5|}{\sqrt{(2 - k)^2 + (4 - k)^2}} = 1 \Rightarrow k = 1 \pm \sqrt{6}$$

となりますが、 $k = 1 - \sqrt{6}$ のとき、 $m = \frac{3-2\sqrt{6}}{3} < 0$ で不適です。なので、 $k = 1 + \sqrt{6}$ です。

• $k = 4$ の場合

$1 + \sqrt{6}$ より大きいので最小値になり得ません。

以上より、与式の最小値は $1 + \sqrt{6}$ です(2013/7/30 修正)。



問題2 別解 2023/7/31 追記

与式を二次式で表現するために、 $t = \tan \frac{\theta}{2}$ とおくと、

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{1-t^2}{t^2+1} \\ \sin(\theta) = \frac{2t}{t^2+1} \end{cases}$$

となります。ただし、 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ なので $t > -1$ です。

すると、

$$\text{与式} = \frac{2 \frac{2t}{t^2+1} + 4 \frac{1-t^2}{t^2+1} + 5}{\frac{2t}{t^2+1} + \frac{1-t^2}{t^2+1} + 1} = \frac{t^2 + 4t + 9}{2t + 2}$$

です。ここで、上式 = k とすると、

$$\frac{t^2 + 4t + 9}{2(t+1)} = k \Rightarrow t^2 + 2(2-k)t - 2k + 9 = 0$$

です。 t は実数なので、判別式を $D/4$ とすれば、

$$D/4 = (2-k)^2 - (-2k+9) \geq 0 \Rightarrow k \leq 1 - \sqrt{6} \text{ または } k \geq 1 + \sqrt{6}$$

となりますが、 $t > -1$ なので、

$$k = \frac{t^2 + 4t + 9}{2(t+1)} = \frac{(t+2)^2 + 5}{2(t+1)} > 0$$

となり、 $k \leq 1 - \sqrt{6} (< 0)$ は不適です。よって、 $k \geq 1 + \sqrt{6}$ ですから、与式の最小値は $1 + \sqrt{6}$ です。

問題2 別解 2023/8/3 追記

こんな問題が試験に出たら、おそらく機械的に答えを導く方法に走ると思います。

$$\begin{cases} x = \cos(\vartheta) \\ y = \sin(\vartheta) \end{cases}$$

すると、

$$x^2 + y^2 = 1 \dots \textcircled{1}$$

$$\frac{4y + 2x + 5}{y + x + 1} = k \Rightarrow (2 - k)x + (4 - k)y - k + 5 = 0 \dots \textcircled{2}$$

です。

・ $k \neq 4$ の場合

上式から y を消去すると、

$$\frac{2(k^2 - 6k + 10)x^2 + 2(k - 5)(k - 2)x - 2k + 9}{(k - 4)^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2(k^2 - 6k + 10)x^2 + 2(k - 5)(k - 2)x - 2k + 9$$

です。 x は実数なので、判別式を $D/4$ とすれば、

$$D/4 = \{(k - 5)(k - 2)\}^2 - 2(-2k + 9) = 4(k - 4)^2(k^2 - 2k - 5) \geq 0$$

$$\Rightarrow (k^2 - 2k - 5) \geq 0 \Rightarrow k \leq 1 - \sqrt{6} \text{ または } k \geq 1 + \sqrt{6}$$

となります。

ここで、 $-\frac{\pi}{2} < \vartheta < \pi$ に対して、

$$y + x + 1 = \sin(\vartheta) + \cos(\vartheta) + 1 = \sqrt{2} \sin\left(\vartheta + \frac{\pi}{4}\right) > 0$$

$$4y + 2x + 5 = 4 \sin(\vartheta) + 2 \cos(\vartheta) + 5 = 2\sqrt{5} \sin(\vartheta + \alpha) > 0, \tan \alpha = \frac{1}{2}$$

ですから、 $k > 0$ です。すると、 $k \leq 1 - \sqrt{6} (< 0)$ は不適です。よって、 $k \geq 1 + \sqrt{6}$ です。

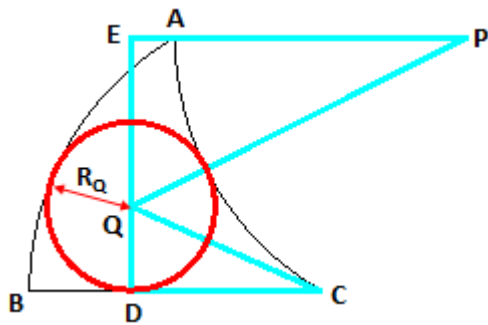
・ $k = 4$ の場合

$1 + \sqrt{6}$ より大きいので最小値になり得ません。

以上より、与式の最小値は $1 + \sqrt{6}$ です

追加問題1

・甲の半径について



左図のように点をとって補助線を入れます。点 Q は甲の中心、点 D は点 Q から線分 BC への垂点、点 P は弧 AC の中心、点 E は点 Q から直線 AP への垂点です。

$\triangle EPQ$ と $\triangle CDQ$ に着目します。甲の半径 R_Q として、三平方の定理で CD と EP の長さを求めます。

$$CD = \sqrt{CQ^2 - DQ^2} = \sqrt{(1 - R_Q)^2 - R_Q^2} = \sqrt{1 - 2R_Q}$$

$$EP = \sqrt{PQ^2 - EQ^2} = \sqrt{(R_Q + 1)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - R_Q\right)^2} = \frac{\sqrt{(4\sqrt{3} + 8)R_Q + 1}}{2}$$

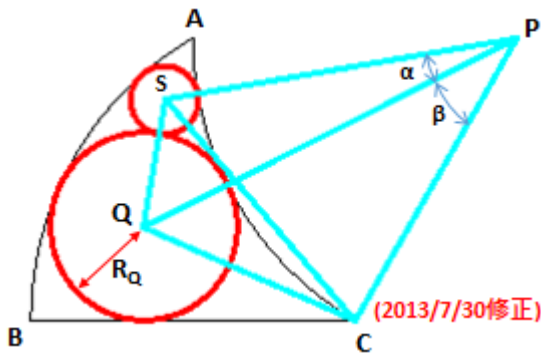
ここで、 $EP - CD = \frac{1}{2}$ なので、

$$\sqrt{1 - 2R_Q} - \frac{\sqrt{(4\sqrt{3} + 8)R_Q + 1}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow R_Q(8\sqrt{3}R_Q + 19R_Q - 2\sqrt{3} - 6) = 0 \Rightarrow R_Q = \frac{2(33 - 5\sqrt{3})}{169}$$

よって、甲の半径 = $\frac{2(33-5\sqrt{3})}{169}$ です。

・乙の半径について



左図のように点をとって補助線を入れます。点 Q は甲の中心、点 P は弧 AC の中心、点 S は乙の中心です。

また、 $\angle SPQ = \alpha$ 、 $\angle CPQ = \beta$ とします (2013/7/30 修正)。

$\triangle PQS$ と $\triangle CPQ$ と $\triangle CPS$ に着目します。甲の半径 R_Q 、乙の半径 R_S として、余弦定理を適用します。

$$\cos \alpha = \frac{(R_Q + 1)^2 + (R_S + 1)^2 - (R_Q + R_S)^2}{2(R_Q + 1)(R_S + 1)}$$

$$\cos \beta = \frac{(R_Q + 1)^2 + 1 - (1 - R_Q)^2}{2(R_Q + 1)}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{(R_S + 1)^2 + 1 - (1 - R_S)^2}{2(R_S + 1)} = \frac{1 + 4R_S}{2(1 + R_S)} \dots \textcircled{1}$$

上式に、 $R_Q = \frac{2(33-5\sqrt{3})}{169}$ を入れて整理すると、

$$\cos \alpha = \frac{(4\sqrt{3} + 29)R_S + 65}{65(1 + R_S)} \dots \textcircled{2}$$

$$\cos \beta = \frac{119 - 6\sqrt{3}}{130} \dots \textcircled{3}$$

となります。①②③より(計算過程は汚いので、次ページに記載します)、次の関係式が得られます。

$$(165\sqrt{3} + 1094)R_S^2 - 20(5\sqrt{3} + 20)R_S + 72 = 0$$

これを解くと、

$$R_S = \frac{2(75 - 23\sqrt{3})}{673}, \frac{6(105 + 19\sqrt{3})}{1657}$$

ですが、甲の半径 $R_Q = \frac{2(33-5\sqrt{3})}{169}$ より小さいので、後者は不適です。

よって、乙の半径 = $\frac{2(75-23\sqrt{3})}{673}$ です。

参考までに、前ページの計算過程を記載します。実直にやると、計算が煩雑になるので、まず、

$$\cos \alpha = \frac{A}{C}, \cos \beta = \frac{B}{D}, \cos(\alpha + \beta) = \frac{X}{Y}$$

とします。すると、

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{C^2 - A^2}}{C}, \sin \beta = \frac{\sqrt{D^2 - B^2}}{D}$$

です。ここで、 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$ なので、

$$\frac{AB}{CD} - \frac{\sqrt{C^2 - A^2}\sqrt{D^2 - B^2}}{CD} = \frac{X}{Y}$$

$$\Rightarrow C^2 D^2 Y^2 - A^2 D^2 Y^2 - B^2 C^2 Y^2 - C^2 D^2 X^2 + 2ABCDXY = 0 \dots \textcircled{4}$$

①②③より、

$$A = (4\sqrt{3} + 29)R_S + 65$$

$$C = 65(1 + R_S)$$

$$B = 119 - 6\sqrt{3}$$

$$D = 130$$

$$X = 1 + 4R_S$$

$$Y = 2(1 + R_S)$$

なので、これらを④に代入すると、

$$\begin{aligned} & -16900(2R_S + 2)^2(R_S(4\sqrt{3} + 29) + 65)^2 - (2R_S + 2)^2(65R_S + 65)^2(119 - 6\sqrt{3})^2 \\ & \quad - 16900(4R_S + 1)^2(65R_S + 65)^2 + 16900(2R_S + 2)^2(65R_S + 65)^2 \\ & \quad + 260(2R_S + 2)(4R_S + 1)(65R_S + 65)(119 - 6\sqrt{3})(R_S(4\sqrt{3} + 29) + 65) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{50700(R_S + 1)^2 \left((165\sqrt{3} + 1094)R_S^2 - 20(5\sqrt{3} + 20)R_S + 72 \right)}{(3\sqrt{3} - 14)} = 0$$

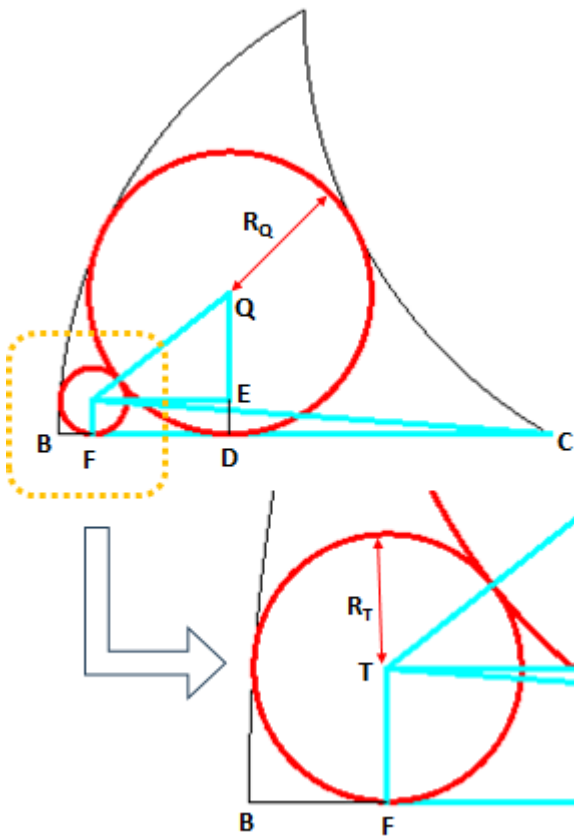
$$\Rightarrow (165\sqrt{3} + 1094)R_S^2 - 20(5\sqrt{3} + 20)R_S + 72 = 0$$

とりあえず、2次方程式なので、代数的に解くことができ、

$$R_S = \frac{2(75 - 23\sqrt{3})}{673}, \frac{6(105 + 19\sqrt{3})}{1657}$$

です。

・丙の半径について



左図のように点をとって補助線を入れます。点 Q は甲の中心、点 D は点 Q から線分 BC への垂点、点 T は丙の中心、点 E は点 T から線分 DQ への垂点、点 F は点 T から線分 BC への垂点です。

$\triangle EQT$ と $\triangle CFT$ に着目します。甲の半径 R_Q 、丙の半径 R_T 、 $DF = L$ として三平方の定理を適用すると、

$$(R_T + R_Q)^2 = (R_Q - R_T)^2 + L^2$$

$$R_T^2 + (L + CD)^2 = (1 - R_T)^2$$

となります。ここで、

$$R_Q = \frac{2(33 - 5\sqrt{3})}{169}$$

$$CD = \sqrt{CQ^2 - DQ^2} = \sqrt{(1 - R_Q)^2 - R_Q^2}$$

$$= \sqrt{1 - 2R_Q}$$

なので、これらを代入して整理すると、

$$8(5\sqrt{3} - 33)R_T + 169L^2 = 0 \dots \textcircled{1}$$

$$338R_T + 169L^2 + 26(2\sqrt{3} + 5)L + 20\sqrt{3} - 132 = 0 \dots \textcircled{2}$$

となります。これを解くと、

$$R_T = \frac{2(37275 \pm 12630\sqrt{2} + 1185\sqrt{3} \pm 4906\sqrt{2}\sqrt{3})}{279841}$$

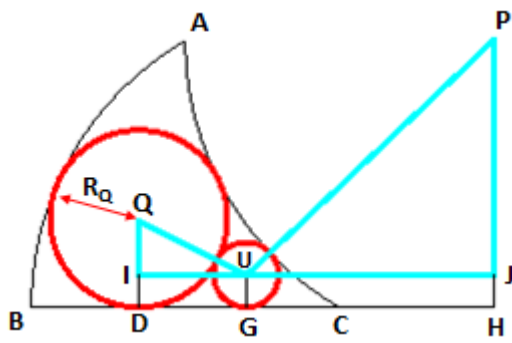
$$L = \frac{4(-255 \mp 741\sqrt{2} - 89\sqrt{3} \pm 65\sqrt{2}\sqrt{3})}{6877}$$

となりますが、 $L > 0$ なので有効な解は、

$$R_T = \frac{2(37275 - 12630\sqrt{2} + 1185 - 4906\sqrt{2}\sqrt{3})}{279841}$$

です。よって、丙の半径 = $\frac{2(37275 - 12630\sqrt{2} + 1185 - 4906\sqrt{2}\sqrt{3})}{279841}$ です。

・丁の半径について



左図のように点をとって補助線を入れます。点 Q は甲の中心、点 D は点 Q から線分 BC への垂点、点 U は丁の中心、点 G は点 U から線分 BC への垂点、点 I は点 U から線分 DQ への垂点です。点 P は弧 AC の中心、点 H は点 P から直線 BC への垂点、点 J は点 U から線分 HP への垂点です。

$\triangle IQU$ と $\triangle JPU$ に着目します。甲の半径 R_Q 、丁の半径 R_U 、 $DG = L$ として三平方の定理を適用すると、

$$(R_Q - R_U)^2 + L^2 = (R_U + R_Q)^2$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - R_U\right)^2 + GH^2 = (R_U + 1)^2$$

となります。ここで、

$$R_Q = \frac{2(33 - 5\sqrt{3})}{169}$$

$$CD = \sqrt{CQ^2 - DQ^2} = \sqrt{(1 - R_Q)^2 - R_Q^2} = \sqrt{1 - 2R_Q}$$

$$GH = CD - L + \frac{1}{2} = \sqrt{1 - 2R_Q} - L + \frac{1}{2}$$

なので、これらを代入して整理すると、

$$2(20\sqrt{3} - 132)R_U + 169L^2 \dots \textcircled{1}$$

$$169(\sqrt{3} + 2)R_U - 169L^2 + 13(4\sqrt{3} + 23)L - 2(23\sqrt{3} + 51) \dots \textcircled{2}$$

となります。これを解くと、

$$R_U = \frac{2(181743 \pm 32724\sqrt{2} + 34581\sqrt{3} \pm 67864\sqrt{2}\sqrt{3})}{552049}$$

$$L = \frac{4(243 \mp 1248\sqrt{2} - 857\sqrt{3} \mp 130\sqrt{2}\sqrt{3})}{9659}$$

となりますが、 $L > 0$ なので有効な解は、

$$R_U = \frac{2(181743 - 32724\sqrt{2} + 34581\sqrt{3} - 67864\sqrt{2}\sqrt{3})}{552049}$$

です。よって、丁の半径 = $\frac{2(181743 - 32724\sqrt{2} + 34581\sqrt{3} - 67864\sqrt{2}\sqrt{3})}{552049}$ です。

追加問題2 サイコロをふって、 n 回目に初めて1の目が出る確率 P_n は、

$$P_n = (1 \text{ 以外の目が出る確率})^{n-1} \cdot (1 \text{ の目が出る確率}) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6}$$

です。Aは1,6,7,12,...回目にサイコロをふることができるので、Aが勝つ確率 P_A は、

$$\begin{aligned} P_A &= P_1 + P_6 + P_7 + P_{12} + \dots = P_1 + P_7 + \dots + P_6 + P_{12} + \dots \\ &= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{1-1} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6} + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{6-1} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6} = \frac{991}{2821} \end{aligned}$$

です。Bは2,5,8,11,...回目にサイコロをふることができるので、Bが勝つ確率 P_B は、

$$\begin{aligned} P_B &= P_2 + P_5 + P_8 + P_{11} + \dots = P_2 + P_8 + \dots + P_5 + P_{11} + \dots \\ &= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{2-1} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6} + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{5-1} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6} = \frac{30}{91} \end{aligned}$$

です。Cは3,4,9,10,...回目にサイコロをふることができるので、Cが勝つ確率 P_C は、

$$\begin{aligned} P_C &= P_3 + P_4 + P_9 + P_{10} + \dots = P_3 + P_9 + \dots + P_4 + P_{10} + \dots \\ &= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{3-1} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6} + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{4-1} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6} = \frac{900}{2821} \end{aligned}$$

です。

以上より、A、B、Cが勝つ確率は、それぞれ $\frac{991}{2821}$ 、 $\frac{30}{91}$ 、 $\frac{900}{2821}$ です。