第 430 回

問題

四辺の長さが AB＝ a ，BC＝ b ，CD＝ c ，DA＝ d である双心四角形（外接円と内接円をもつ四角形）とき，次の設問の答えを a ， b ， c ， d で表せ。

(1)　AC＝ e ，BD＝ f として， e, f の値をそれぞれ求めよ。

(2)　$e \times f$ の値を求めよ。

(3)　四角形 ABCD の面積 S を求めよ。

(4)　対角線AC，BDのなす角 θ の $\sin\theta$ の値を求めよ。

(5)　四角形 ABCD の内接円 I の半径 r を求めよ。

(6)　四角形 ABCD の外接円 O の半径 R を求めよ。

(7)　$(ef)^2=4r^2(ef+4R^2)$ を証明せよ。

出典　上の (7) は「聖なる数学・算額」森北出版　深川英俊著

　寛政 7（1795 年）年に掲げた善光寺の算額の 2 番目から

解答　四角形 ABCD は円に内接するから，対角の和は 180° である。

したがって，$\cos D=-\cos B$ ， $\cos C=-\cos A$ ， $\sin D=\sin B$ ， $\sin C=\sin A$ である。

(1)　△ABC，△ACD に余弦定理を適用して， $AC^2=a^2+b^2-2ab\cos B=c^2+d^2+2cd\cos B$

$$\therefore \cos B=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$$ より，$AC=e=\sqrt{\dfrac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}}$　答

同様に，△ABD，△CDB に余弦定理を適用して，

$$\cos A=\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}$$ より，$BD=f=\sqrt{\dfrac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}$　答

(2)　(1) より， $ef=\sqrt{\dfrac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}}\cdot\sqrt{\dfrac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}=ac+bd$　答（トレミーの定理）

(3)　$$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{\sqrt{4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}}{2(ab+cd)}$$

$$=\frac{\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}}{2(ab+cd)}$$

四角形 ABCD は円に外接するから， $a+c=b+d$ より，$\sin B=\dfrac{\sqrt{(2c)(2d)(2a)(2b)}}{2(ab+cd)}=\dfrac{2\sqrt{abcd}}{ab+cd}$ より，

$$S=\triangle ABC+\triangle ACD=\frac{1}{2}(ab+cd)\sin B=\frac{1}{2}(ab+cd)\cdot\frac{2\sqrt{abcd}}{ab+cd}=\sqrt{abcd}$$　答

(4)　$S=\dfrac{1}{2}ef\sin\theta$ より， $\sin\theta=\dfrac{2S}{ef}=\dfrac{2\sqrt{abcd}}{ac+bd}$　答

(5)　$S=\dfrac{r}{2}(a+b+c+d)=r(a+c)=r(b+d)$ より， $r=\dfrac{\sqrt{abcd}}{a+c}=\dfrac{\sqrt{abcd}}{b+d}$　答

(6)　△ABC に正弦定理を適用すると，$2R=\dfrac{e}{\sin B}$ より，

$$R=\frac{e}{2\sin B}=\frac{\sqrt{\dfrac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}}}{2\cdot\dfrac{2\sqrt{abcd}}{ab+cd}}=\frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{4\sqrt{abcd}}$$　答

(7) 証明

$$4r^2(ef+4R^2)=4\cdot\frac{abcd}{(a+c)^2}\left\{(ac+bd)+4\cdot\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{16abcd}\right\}$$

$$=\frac{4abcd(ac+bd)+(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(a+c)^2}=\frac{\{4abcd+(ab+cd)(ad+bc)\}(ac+bd)}{(a+c)^2}$$

$$=\frac{\{abd(a+c)+abc(b+d)+acd(b+d)+bcd(a+c)\}(ac+bd)}{(a+c)^2}$$

$$=\frac{\{bd(a+c)^2+ac(b+d)^2\}(ac+bd)}{(a+c)^2}=(ac+bd)^2 \quad (\because b+d=a+c \text{ より})$$

$$=(ef)^2$$

よって，$(ef)^2=4r^2(ef+4R^2)$ 終

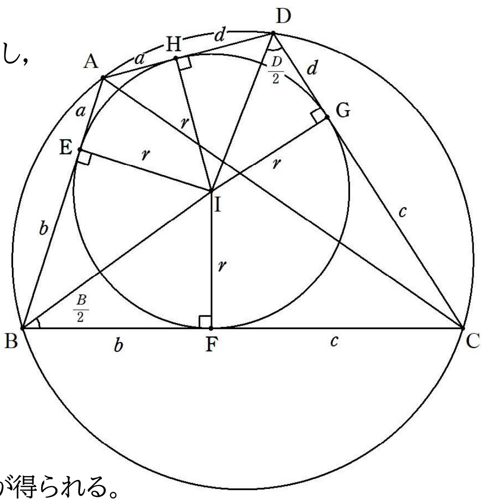
(7) 別解

大円 O(R)，小円 I(r) とする。

I から AB，BC，CD，DA に下した垂線の足をそれぞれ E，F，G，H とし，

AH=AE= a，BE=BF= b，CF=CG= c，DG=DH= d とおく。

（図が煩雑になるから，O，対角線 BD は図に示していない。）



対角線 AC について，

△ABC に正弦定理を適用すると，$2R=\dfrac{AC}{\sin B}$

$$\therefore \text{AC}=2R\sin B=2R\cdot 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$=4R\cdot\frac{r}{\sqrt{b^2+r^2}}\cdot\frac{b}{\sqrt{b^2+r^2}}=\frac{4Rrb}{b^2+r^2} \quad \cdots①$$

同様に，△ACD から，①の b を d に入れ換えて，AC$=\dfrac{4Rrd}{d^2+r^2}$ …② が得られる。

①，②より，$\dfrac{4Rrb}{b^2+r^2}=\dfrac{4Rrd}{d^2+r^2}$ から，$bd=r^2$ …③

③を①に代入すると，AC$=\dfrac{4Rrb}{b^2+bd}$ から，$b+d=\dfrac{4Rr}{AC}$ …④

同様に，対角線 BD から，$ac=r^2$ …⑤ $a+c=\dfrac{4Rr}{BD}$ …⑥が得られる。

四角形 ABCD は円に内接するから，トレミーの定理により，

AC・BD=AB・CD+BC・DA$=(a+b)(c+d)+(b+c)(d+a)=4r^2+ab+bc+cd+da$ （∵③，⑤より）

$$=4r^2+(a+c)(b+d)=4r^2+\frac{4Rr}{BD}\cdot\frac{4Rr}{AC} \quad (\because ④，⑥ \text{ より})$$

分母を払うと，$(AC\cdot BD)^2=4r^2(AC\cdot BD+4R^2)$

よって，$(ef)^2=4r^2(ef+4R^2)$ 終

補足 この証明はオリジナルで，出典に紹介されている和算家の解法に比べ，より簡潔になっていると想う。

追加問題

第1番から第 n 番までの番号のついた n 個の袋がある。一般に第 k 番目の袋には k 個の赤球と $(n-k)$ 個の白球が入れてある。

(1)　第 k 番目の袋から無作為に1球ずつ5回球を取り出す。ただし，1回ごとに球を袋に戻すものとする。このとき，赤球が4回，白球が1回出る確率を求めよ。

(2)　n 個の袋のうちの1袋を無作為に選んで，その袋から1球ずつ5回球を取り出す。ただし，1個ごとに球をその袋に戻すものとする。このとき，赤球が4回，白球が1回出る確率は n が極めて大きいときどのような値に近いか。

解答

(1)　1回の試行で赤球が出る確率は $\dfrac{k}{n}$，白球が出る確率は $1-\dfrac{k}{n}$ であるから，

5回のうち赤球が4回，白球が1回出る確率は，$_5C_4\left(\dfrac{k}{n}\right)^4\left(1-\dfrac{k}{n}\right)=5\left(\dfrac{k}{n}\right)^4\left(1-\dfrac{k}{n}\right)$　答

(2)　第 k 番目の袋が選ばれる確率は $\dfrac{1}{n}$

よって第 k 番目が選ばれた上に，その袋から赤球が4回，白球が1回出る確率は，$\dfrac{5}{n}\left(\dfrac{k}{n}\right)^4\left(1-\dfrac{k}{n}\right)$

よって求める確率は，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{5}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4\left(1-\frac{k}{n}\right)$

$\left(\dfrac{k}{n}\right)^4\left(1-\dfrac{k}{n}\right)$ は関数 $x^4(1-x)$ の $x=\dfrac{k}{n}$ における値であるから，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{5}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4\left(1-\frac{k}{n}\right)=5\int_0^1 x^4(1-x)dx=5\left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}\right]_0^1=\frac{1}{6}$$

よって，n が極めて大きいとき確率は $\dfrac{1}{6}$ に近い。　答

(2023/8/13　ジョーカー)