問題

(1)$\triangle$ ABCと$\triangle$ ADCに着目します。それぞれに余弦定理を適用すると、

$$\cos B = \frac{e^2 - a^2 - b^2}{2ab}, \cos D = \frac{e^2 - c^2 - d^2}{2cd}$$

です。□ABCDは円に内接しているので、$B + D = \pi \Rightarrow \cos B = \cos(\pi - D) = -\cos D$ですから、

$$\frac{e^2 - a^2 - b^2}{2ab} = -\frac{e^2 - c^2 - d^2}{2cd}$$

となり、$e > 0$の範囲で解くと、

$$e = \sqrt{\frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd}}$$

です。また、$\triangle$ BADと$\triangle$ BCDについても、

$$\cos A = \frac{f^2 - a^2 - d^2}{2ad}, \cos C = \frac{f^2 - b^2 - c^2}{2bc}$$

です。$\cos A = -\cos C$なので、同様にして、

$$\frac{f^2 - a^2 - d^2}{2ad} = -\frac{f^2 - b^2 - c^2}{2bc}$$

となり、fについて解くと、

$$f = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}}$$

です。以上より、$e = \sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}}, f = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}$です。

(2)(1)で求めた値を使って、

$$(ef)^2 = \frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd} \cdot \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc} = (ac + bd)^2 \Rightarrow ef = ac + bd$$

となります。よって、$ef = ac + bd$です。

(3)四角形の面積Sを 2 つの三角形の面積和と考えると、

$$\mathrm{S} = \triangle \mathrm{ABC}\text{ の面積} + \triangle \mathrm{ADC}\text{ の面積} = \frac{\mathrm{ab}\sin \mathrm{B}}{2} + \frac{\mathrm{cd}\sin \mathrm{D}}{2}$$

です。ここで、四角形が円に内接しているので、$\mathrm{B}+\mathrm{D}=\pi \Rightarrow \sin\mathrm{B}=\sin(\pi-\mathrm{D})=\sin\mathrm{D}$ですから、

$$\mathrm{S} = \frac{\mathrm{ab}\sin \mathrm{B}}{2} + \frac{\mathrm{cd}\sin \mathrm{B}}{2} = \frac{(\mathrm{ab}+\mathrm{cd})\sin \mathrm{B}}{2} \Rightarrow \mathrm{S}^2 = \frac{(\mathrm{ab}+\mathrm{cd})^2\sin^2 \mathrm{B}}{2^2} = \frac{(\mathrm{ab}+\mathrm{cd})^2(1-\cos^2 \mathrm{B})}{2^2}$$

です。また、$\triangle\mathrm{ABC}$に余弦定理を適用します。

$$\cos \mathrm{B} = \frac{\mathrm{e}^2-\mathrm{a}^2-\mathrm{b}^2}{2\mathrm{ab}}$$

ここで、$\mathrm{e}^2 = \frac{(\mathrm{ad}+\mathrm{bc})(\mathrm{ac}+\mathrm{bd})}{\mathrm{ab}+\mathrm{cd}}$なので、

$$\cos \mathrm{B} = \frac{\frac{(\mathrm{ad}+\mathrm{bc})(\mathrm{ac}+\mathrm{bd})}{\mathrm{ab}+\mathrm{cd}}-\mathrm{a}^2-\mathrm{b}^2}{2\mathrm{ab}} = \frac{\mathrm{c}^2+\mathrm{d}^2-(\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2)}{2(\mathrm{ab}+\mathrm{cd})}$$

です。すると、

$$\mathrm{S}^2 = \frac{(\mathrm{ab}+\mathrm{cd})^2(1-\cos^2 \mathrm{B})}{2^2} = \frac{(\mathrm{ab}+\mathrm{cd})^2\left\{1-\left(\frac{\mathrm{c}^2+\mathrm{d}^2-(\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2)}{2(\mathrm{ab}+\mathrm{cd})}\right)^2\right\}}{2^2}$$

$$= \frac{(\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}-\mathrm{d})(\mathrm{b}+\mathrm{c}+\mathrm{d}-\mathrm{a})(\mathrm{c}+\mathrm{d}+\mathrm{a}-\mathrm{b})(\mathrm{d}+\mathrm{a}+\mathrm{b}-\mathrm{c})}{16}$$

となります。ここで、四角形が円に外接しているので、$\mathrm{a}+\mathrm{c}=\mathrm{b}+\mathrm{d}$ですから。上式の分子は、

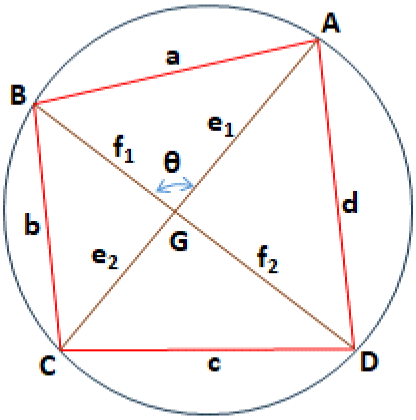
$$\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}-\mathrm{d} = \mathrm{a}+\mathrm{c}+\mathrm{b}-\mathrm{d} = \mathrm{b}+\mathrm{d}+\mathrm{b}-\mathrm{d} = 2\mathrm{b}$$
$$\mathrm{b}+\mathrm{c}+\mathrm{d}-\mathrm{a} = \mathrm{b}+\mathrm{d}+\mathrm{c}-\mathrm{a} = \mathrm{a}+\mathrm{c}+\mathrm{c}-\mathrm{a} = 2\mathrm{c}$$
$$\mathrm{c}+\mathrm{d}+\mathrm{a}-\mathrm{b} = \mathrm{a}+\mathrm{c}+\mathrm{d}-\mathrm{b} = \mathrm{b}+\mathrm{d}+\mathrm{d}-\mathrm{b} = 2\mathrm{d}$$
$$\mathrm{d}+\mathrm{a}+\mathrm{b}-\mathrm{c} = \mathrm{b}+\mathrm{d}+\mathrm{a}-\mathrm{c} = \mathrm{a}+\mathrm{c}+\mathrm{a}-\mathrm{c} = 2\mathrm{a}$$

となり、

$$\mathrm{S}^2 - \frac{2\mathrm{b}\cdot 2\mathrm{c}\cdot 2\mathrm{d}\cdot 2\mathrm{a}}{16} = \mathrm{abcd} \Rightarrow \mathrm{S} = \sqrt{\mathrm{abcd}}$$

です。以上より、$\mathrm{S}=\sqrt{\mathrm{abcd}}$です。

(4)対角線AC, BDの交点をG、$AG = e_1, CG = e_2, BG = f_1, DG = f_2$とします。



$\triangle BAD$と$\triangle BCD$に着目します。底辺BDは共通なので、

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{\triangle BAD \text{ の面積}}{\triangle BCD \text{ の面積}} = \frac{\frac{ad\sin A}{2}}{\frac{bc\sin C}{2}} = \frac{\frac{ad\sin A}{2}}{\frac{bc\sin(\pi - A)}{2}}$$

$$= \frac{\frac{ad\sin A}{2}}{\frac{bc\sin A}{2}} = \frac{ad}{bc}$$

となりますから、

$$e_1 = \frac{ad}{ad+bc}e, e_2 = \frac{bc}{ad+bc}e$$

となります。

$\triangle ABC$と$\triangle ADC$についても、同様にして、

$$f_1 = \frac{ab}{ab+cd}f, f_2 = \frac{cd}{ab+cd}f$$

です。すると、

$$S = \triangle AGB \text{ の面積} + \triangle BGC \text{ の面積} + \triangle CGD \text{ の面積} + \triangle DGA \text{ の面積}$$

$$= \frac{e_1f_1\sin\theta}{2} + \frac{e_2f_1\sin(\pi-\theta)}{2} + \frac{e_2f_2\sin\theta}{2} + \frac{e_1f_2\sin(\pi-\theta)}{2}$$

$$= \frac{e_1f_1\sin\theta}{2} + \frac{e_2f_1\sin\theta}{2} + \frac{e_2f_2\sin\theta}{2} + \frac{e_1f_2\sin\theta}{2} = \frac{(e_1f_1 + e_2f_1 + e_2f_2 + e_1f_2)\sin\theta}{2}$$

$$= \frac{\left(\frac{ad}{ad+bc}e\frac{ab}{ab+cd}f + \frac{bc}{ad+bc}e\frac{ab}{ab+cd}f + \frac{bc}{ad+bc}e\frac{cd}{ab+cd}f + \frac{ad}{ad+bc}e\frac{cd}{ab+cd}f\right)\sin\theta}{2}$$

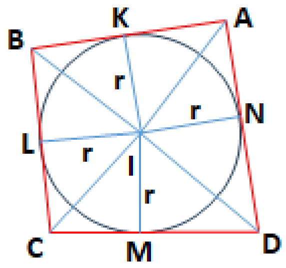
$$= \frac{ef\sin\theta}{2} \Rightarrow \sin\theta = \frac{2S}{ef}$$

ここで、(2)(3)で求めた通り、$ef = ac + bd$、$S = \sqrt{abcd}$なので、

$$\sin\theta = \frac{2S}{ef} = \frac{2\sqrt{abcd}}{ac+bd}$$

です。よって、求める角度は$\sin\theta = \frac{2\sqrt{abcd}}{ac+bd}$です。

(5)三角形の内心の半径を求めるやり方と同じ要領でアプローチします。



内心Iから辺AB、BC、CD、DAに下した垂点をK、L、M、N とすると、

S =△ AIK の面積 +△ BIK の面積
+ △ BIL の面積 +△ CIL の面積
+ △ CIM の面積 +△ DIM の面積
+ △ DIN の面積 +△ AIN の面積

です。各三角形は直角三角形なので、

$$=\frac{AK\cdot r}{2}+\frac{BK\cdot r}{2}+\frac{BL\cdot r}{2}+\frac{CL\cdot r}{2}+\frac{CM\cdot r}{2}+\frac{DM\cdot r}{2}+\frac{DN\cdot r}{2}+\frac{AN\cdot r}{2}$$

$$=\frac{(AK+BK+BL+CL+CM+DM+DN+AN)r}{2}=\frac{(AB+BC+CD+DA)r}{2}$$

$$=\frac{(a+b+c+d)r}{2}$$

ここで、$S=\sqrt{abcd}$なので、

$$\frac{(a+b+c+d)r}{2}=\sqrt{abcd}\Rightarrow r=\frac{2\sqrt{abcd}}{a+b+c+d}$$

です。よって、求める半径は$r=\frac{2\sqrt{abcd}}{a+b+c+d}$です。

(6)△ ABCに余弦定理を適用します。

$$\cos B = \frac{e^2 - a^2 - b^2}{2ab}$$

次に、正弦定理を適用します。

$$2R = \frac{e}{\sin B} \Rightarrow 2^2R^2 = \frac{e^2}{\sin^2 B} = \frac{e^2}{1 - \cos^2 B} = \frac{e^2}{1 - \left(\frac{e^2 - a^2 - b^2}{2ab}\right)^2}$$

ここで、$e^2 = \frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}$なので、

$$2^2R^2 = \frac{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}}{1 - \left\{\frac{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd} - a^2 - b^2}{2ab}\right\}^2}$$

$$= \frac{4(da+bc)(ac+bd)(ab+cd)}{(a+b+c-d)(b+c+d-a)(c+d+a-b)(d+a+b-c)}$$

です。また、四角形が円に外接しているので、$a + c = b + d$ですから。上式の分母は、

$$a + b + c - d = a + c + b - d = b + d + b - d = 2b$$

$$b + c + d - a = b + d + c - a = a + c + c - a = 2c$$

$$c + d + a - b = a + c + d - b = b + d + d - b = 2d$$

$$d + a + b - c = b + d + a - c = a + c + a - c = 2a$$

なので、

$$2^2R^2 = \frac{4(ad+bc)(ac+bd)(ab+cd)}{2b \cdot 2c \cdot 2d \cdot 2a} = \frac{(ad+bc)(ac+bd)(ab+cd)}{4abcd}$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)(ab+cd)}{abcd}}$$

です。よって、求める半径は$R = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)(ab+cd)}{abcd}}$です。

(7)もっとマシなやり方があると思いますが、アイデアが浮かばなかったので、単純に計算しました。
(1)〜(6)で求めた以下の値を使います。

$$\mathrm{ef}=\mathrm{ac}+\mathrm{bd}$$

$$\mathrm{r}=\frac{2\sqrt{\mathrm{abcd}}}{\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}+\mathrm{d}}\Rightarrow \mathrm{r}^2=\frac{4\mathrm{abcd}}{(\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}+\mathrm{d})^2}$$

$$\mathrm{R}=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{(\mathrm{da}+\mathrm{bc})(\mathrm{ac}+\mathrm{bd})(\mathrm{ab}+\mathrm{cd})}{\mathrm{abcd}}}\Rightarrow \mathrm{R}^2=\frac{(\mathrm{da}+\mathrm{bc})(\mathrm{ac}+\mathrm{bd})(\mathrm{ab}+\mathrm{cd})}{16\mathrm{abcd}}$$

右辺 − 左辺に当てはめると、

$$\begin{aligned}&4\mathrm{r}^2\left(4\mathrm{R}^2+\mathrm{ef}\right)-(\mathrm{ef})^2\\&=4\frac{4\mathrm{abcd}}{(\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}+\mathrm{d})^2}\left\{4\frac{(\mathrm{da}+\mathrm{bc})(\mathrm{ac}+\mathrm{bd})(\mathrm{ab}+\mathrm{cd})}{16\mathrm{abcd}}+\mathrm{ac}+\mathrm{bd}\right\}-(\mathrm{ac}+\mathrm{bd})^2\\&=\frac{(\mathrm{b}+\mathrm{d}-\mathrm{a}-\mathrm{c})(\mathrm{ac}+\mathrm{bd})(\mathrm{a}^2\mathrm{c}+\mathrm{ac}^2-\mathrm{b}^2\mathrm{d}-\mathrm{bd}^2+3(\mathrm{abc}-\mathrm{abd}+\mathrm{acd}-\mathrm{bcd}))}{(\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}+\mathrm{d})^2}\end{aligned}$$

ここで、四角形が円に外接していますから、$\mathrm{a}+\mathrm{c}=\mathrm{b}+\mathrm{d}\Rightarrow \mathrm{b}+\mathrm{d}-\mathrm{a}-\mathrm{c}=0$となり、上式 $=0$です。
よって、$(\mathrm{ef})^2=4\mathrm{r}^2\left(4\mathrm{R}^2+\mathrm{ef}\right)$です。

追加問題

(1)赤球が 4 回、白球が 1 回出る確率は$\left(\frac{k}{n}\right)^4\frac{n-k}{n}$です。そして、その組合せは$\binom{5}{4}$通りあるので、求める確率を$P_{n,k}$とすると、

$$P_{n,k}=\binom{5}{4}\left(\frac{k}{n}\right)^4\frac{n-k}{n}=\frac{5k^4(n-k)}{n^5}$$

です。よって、求める確率は$\frac{5k^4(n-k)}{n^5}$です。

(2)n袋のうち1袋を選んで、赤球が 4 回、白球が 1 回出る確率をP_nとすると、

$$P_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{P_{n,k}}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{5k^4(n-k)}{n^5}}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}5\left(\frac{k}{n}\right)^4\left(1-\frac{k}{n}\right)$$

です。nが非常に大きいときの確率をPとすると、

$$P=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}P_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}5\left(\frac{k}{n}\right)^4\left(1-\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 5x^4(1-x)\,dx=\frac{1}{6}$$

です。よって、求める確率は$\frac{1}{6}$です。

(2)別解　等差数列の和の公式を使って、少々強引に計算します。

$$P_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{P_{n,k}}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{5k^4(n-k)}{n^6}=5\left\{\frac{1}{n^5}\sum_{k=1}^{n}k^4-\frac{1}{n^6}\sum_{k=1}^{n}k^5\right\}$$

$$=5\left\{\frac{1}{n^5}\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}-\frac{1}{n^6}\frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}\right\}$$

$$=\frac{2n^4-5n^2+3}{12n^4}=\frac{2-\frac{5}{n^2}+\frac{3}{n^4}}{12}$$

となります。nを極めて大きくすると、

$$P=\lim_{n\to\infty}P_n=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

です。よって、求める確率は$\frac{1}{6}$です。