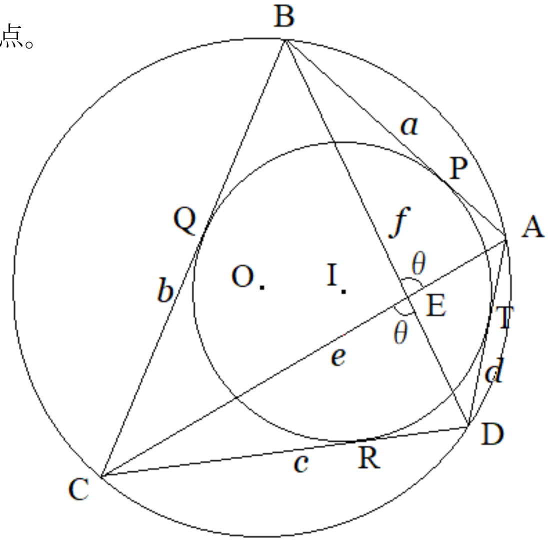
● 問題 430 解答＜三角定規＞

図のように各点，各量を定める。P, Q, R, T は内接円との接点。



(1) △ ABC, △ ACD に余弦定理を適用し

$$e^2=a^2+b^2-2ab\cos B$$
$$=c^2+d^2-2cd\cos D=c^2+d^2+2cd\cos B$$
$$(\because\ B+D=180^\circ\ )$$

$$\therefore\ \cos B=\frac{a^2+b^2-e^2}{2ab}=\frac{-c^2-d^2+e^2}{2cd}\ \cdots①$$

①を e について整理することにより

$$(ab+cd)e^2=ab(c^2+d^2)+cd(a^2+b^2)=(ac+bd)(ad+bc)$$

$$\therefore\ e=\sqrt{\boldsymbol{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}}\ \cdots②\quad [答]$$

②と同様にして

$$f=\sqrt{\boldsymbol{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bd}}}\ \cdots③\quad [答]$$

(2) ①②より　$ef=\boldsymbol{ac+bd}\ \cdots\ ④$　[答]

(3) $S=\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ACD}=\dfrac{1}{2}(ab+cd)\sin B\ \cdots⑤$

①②より　$\cos B=\dfrac{a^2+b^2-\dfrac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}{2ab}=\dfrac{(a^2+b^2)(ab+cd)-(ac+bd)(ad+bc)}{2ab(ab+cd)}$

$$=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$$

$$\therefore\ \sin^2B=1-\cos^2B=\frac{4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4(ab+cd)^2}$$

$$=\cdots=\frac{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}{4(ab+cd)^2}$$

また図において AP＝AT, BT＝BQ 等が成り立つことから，$a+c=b+d$

このとき $-a+b+c+d=2c$ 等が成り立つから，$\sin^2B=\dfrac{4abcd}{(ab+cd)^2}$。これを⑤に戻して

$$S=\sqrt{\boldsymbol{abcd}}\ \cdots⑥\quad [答]$$

(4) 図より明らかに $S=\dfrac{1}{2}ef\sin\theta$ だから，$\sin\theta=\dfrac{2S}{ef}=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{abcd}}{ac+bd}}\ \cdots⑦$　[答]

(5) 図より明らかに $S=\dfrac{1}{2}(a+b+c+d)r$。$\therefore\ r=\dfrac{2S}{a+b+c+d}=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{abcd}}{a+b+c+d}}\ \cdots⑧$　[答]

(6) 正弦定理より　$\dfrac{e}{\sin B}=2R$。

$$\therefore\ R=\frac{e}{2\sin B}=\frac{1}{2}\cdot\frac{ab+cd}{2\sqrt{abcd}}\cdot\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}=\boldsymbol{\frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{abcd}}}\ \cdots⑨\quad [答]$$

［追加問題］

(1) 1 個の白球が何番目に出るかの 5 通り の場合があるので，求める確率は　$\mathbf{5\left(\dfrac{k}{n}\right)^4\left(\dfrac{n-k}{n}\right)}$ …[答]

(2) $\dfrac{1}{n}$ の確率で 1 つの袋を選ぶのだから，求める確率は

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{5}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4\left(1-\frac{k}{n}\right)\overset{n\to\infty}{\to}5\int_0^1 x^4(1-x)dx=\left[x^5-\frac{5x^6}{6}\right]_0^1=\mathbf{\frac{1}{6}}\ \cdots[\text{答}]$$