第 431 回

問題 1 ＜2016 年京都大学の入試問題＞

$n \geqq 4$ の自然数とする。$2^{12}=1331$ が両辺とも n 進法で表記されている。このとき， n はいくつか。十進法で答えよ。

解答　以下，n 進数であることを，その数の右下に $_{(n)}$ と書いて表す。(例えば，n 進数 12 は $12_{(n)}$ と書く)

$2_{(n)}$，$12_{(n)}$，$1331_{(n)}$ を 10 進数で表すと

$2_{(n)}=2$，$12_{(n)}=n+2$，$1331_{(n)}=n^3+3n^2+3n+1=(n+1)^3$

よって，与式から　$2^{n+2}=(n+1)^3$　……①

① の左辺の素因数は 2 のみであるから，$n+1$ の素因数も 2 のみである。

また，n は 4 以上の自然数であるから，

$n+1=2^m$ (m は 3 以上の整数)　……②

と表される。

このとき，① から　$2^{2^m+1}=(2^m)^3$

すなわち，$2^{2^m+1}=2^{3m}$ であるから

$2^m+1=3m$　……③

③ において

$m=1$ とすると　(左辺)$=3$，(右辺)$=3$

よって，③ は成り立つ。

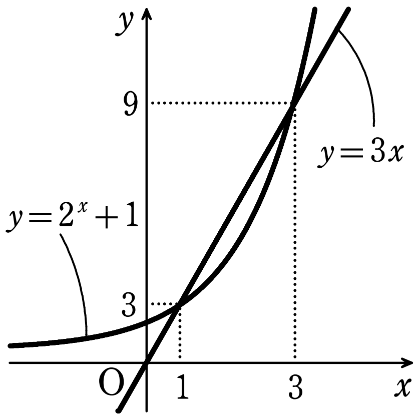
$m=2$ とすると　(左辺)$=5$，(右辺)$=6$

よって，③ は成り立たない。

$m=3$ とすると　(左辺)$=9$，(右辺)$=9$

よって，③ は成り立つ。

$y=2^x+1$ のグラフと直線 $y=3x$ の位置関係は右の図のようになるから，③ を満たす 3 以上の整数 m は $m=3$ のみである。



② から，$m=3$ のとき　$n+1=2^3$

よって，求める n の値は　$n=7$　答

参考　この解答では，③ を満たす 3 より大きい m は存在しないことを，グラフを利用して確かめた。

$m>3$ のとき，$2^m+1>3m$ が成り立つことを数学的帰納法で証明して，確かめてもよい。

問題 2 ＜類題＞

$n \geqq 4$ の自然数とする。$3^{10} \div 3^2=1331$ が両辺とも n 進法で表記されている。このとき， n はいくつか。十進法で答えよ。

解答　以下，n 進数であることを，その数の右下に $_{(n)}$ と書いて表す。(例えば，n 進数 12 は $12_{(n)}$ と書く)

$3_{(n)}$，$10_{(n)}$，${3^2}_{(n)}$，$1331_{(n)}$ を 10 進数で表すと

$3_{(n)}=3$，$10_{(n)}=n$，${3^2}_{(n)}=3^2$，$1331_{(n)}=n^3+3n^2+3n+1=(n+1)^3$

よって，与式から　$3^n \div 3^2=(n+1)^3$　$\therefore 3^{n-2}=(n+1)^3$ ……①

① の左辺の素因数は 3 のみであるから，$n+1$ の素因数も 3 のみである。

また，n は 4 以上の自然数であるから，

$n+1=3^m$ (m は 2 以上の整数)　……②

と表される。

このとき，① から　$3^{3^m-3}=(3^m)^3$

すなわち，$3^{3^m-3}=3^{3m}$ であるから

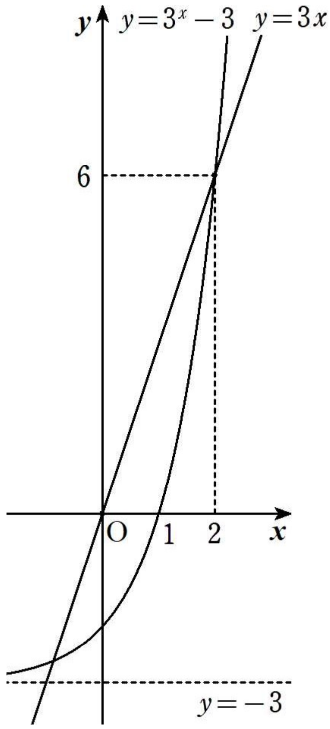
$3^m-3=3m$　……③

③ において

$m=2$ とすると　(左辺)$=6$，(右辺)$=6$

よって，③ は成り立つ。

$y=3^x-3$ のグラフと直線 $y=3x$ の位置関係は右の図のようになるから，③ を満たす 2 以上の整数 m は $m=2$ のみである。



② から，$m=2$ のとき　$n+1=3^2$

よって，求める n の値は　$n=8$　答

問題 3 ＜1969 年金沢大学の入試問題の類題＞

ある正の数 N を 5 進法で表わすと，整数部分が 2 桁の循環小数 $xy.zzz\cdots$ となる。

また，$N-1$ を 9 進法で表わすと，整数部分が 2 桁の循環小数 $zy.xxx\cdots$ となる。このとき，x，y，z の値を求めよ。

解答　仮定より，x，y，z は自然数で，$1\leqq x\leqq 4$，$0\leqq y\leqq 4$，$1\leqq z\leqq 4$ である。

以下，n 進数であることを，その数の右下に $_{(n)}$ と書いて表す。(例えば，n 進数 12 は $12_{(n)}$ と書く。)

$$N=xy.zzz\cdots_{(5)}=5x+y+\frac{z}{5}+\frac{z}{5^2}+\frac{z}{5^3}+\cdots=5x+y+\frac{\frac{z}{5}}{1-\frac{1}{5}}=5x+y+\frac{z}{4}\quad\cdots①$$

$$N-1=zy.xxx\cdots_{(9)}=9z+y+\frac{x}{9}+\frac{x}{9^2}+\frac{x}{9^3}+\cdots=9z+y+\frac{\frac{x}{9}}{1-\frac{1}{9}}=9z+y+\frac{x}{8}\quad\cdots②$$

①−②より，$1=\left(5x+y+\frac{z}{4}\right)-\left(9z+y+\frac{x}{8}\right)=\frac{39}{8}x-\frac{35}{4}z$　$\therefore 39x-70z=8$

$x=\frac{70z+8}{39}=2z-\frac{8(z-1)}{39}$　…③

$z-1=39k$ （k は整数）である。$z=39k+1$

$1\leqq z\leqq 4$ より，$z=1$

③より，$x=2$

このとき，①より，$N=10+y+\frac{1}{4}$　…①′

②より，$N-1=9+y+\frac{2}{8}$　$\therefore N=10+y+\frac{1}{4}$　…②′

①′，②′は同値の式であるから，$y=0, 1, 2, 3, 4$ となる。

よって，求める x，y，z の値は，$(x,\ y,\ z)=(2,\ 0,\ 1)$，$(2,\ 1,\ 1)$，$(2,\ 2,\ 1)$，$(2,\ 3,\ 1)$，$(2,\ 4,\ 1)$ 答

参考

問題文で，「$N-1$ を 9 進法で表わすと，整数部分が 2 桁の循環小数 $yz.xxx\cdots$ となる。」と直すと，答は 1 通りの $(x,\ y,\ z)=(2,\ 1,\ 1)$ となる。

追加問題 1

n 本のうち a 本が当たるくじがある。これから 48 本引いて 7 本当たる確率と，50 本引いて 9 本当たる確率が等しいという。$2023<n<2050$ のとき，n，a の値を求めよ。

解答　$\dfrac{a}{n}=p$ とおくと，仮定より，${}_{48}C_7p^7(1-p)^{41}={}_{50}C_9p^9(1-p)^{41}$

$p^2=\dfrac{{}_{48}C_7}{{}_{50}C_9}=\dfrac{9\cdot 8}{50\cdot 49}=\left(\dfrac{6}{35}\right)^2$　$p>0$ より，$p=\dfrac{6}{35}$

よって，$a=np=\dfrac{6}{35}n$ より，n は 35 の倍数である。

$2023=35\cdot 57+28$，$2050=35\cdot 58+20$ より，$2023<n<2050$ のとき，$57\dfrac{28}{35}<\dfrac{n}{35}<58\dfrac{20}{35}$ であるから，

$\dfrac{n}{35}=58$ より，$n=2030$　$a=\dfrac{6}{35}\times 2030=348$

答　$n=2030$，$a=348$

追加問題 2

ある数を n 進法で表すと，循環小数 $0.0\dot{2}\dot{1}$ となり，m 進法で表すと，循環小数 $0.\dot{1}2\dot{5}$ となる。ある数を 3 進法で表すとどうなるか。ただし，m，n は 9 以下の自然数とする。

解答　a が n 進数であることを，$a_{(n)}$ で表す。特に a が 10 進数のときは a だけで表す。

ある数を x とおく。表示に使われている数字から，n は 3 以上，m は 6 以上の自然数である。（n，$m\leqq 9$ ）

$$x=0.0\dot{2}\dot{1}_{(n)}=\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\frac{2}{n^5}+\frac{1}{n^6}+\cdots=\frac{\frac{2}{n^2}}{1-\frac{1}{n^3}}+\frac{\frac{1}{n^3}}{1-\frac{1}{n^3}}=\frac{2n+1}{n^3-1}=a_n$$ とおくと，

$a_3=\dfrac{7}{26}$，$a_4=\dfrac{1}{7}$，$a_5=\dfrac{11}{124}$，$a_6=\dfrac{13}{215}$，$a_7=\dfrac{5}{114}$，$a_8=\dfrac{17}{511}$，$a_9=\dfrac{19}{728}$

同様に，

$$x=0.\dot{1}2\dot{5}_{(m)}=\frac{1}{m}+\frac{2}{m^2}+\frac{5}{m^3}+\frac{1}{m^4}+\frac{2}{m^5}+\frac{5}{m^6}+\cdots=\frac{m^2+2m+5}{m^3-1}=b_m$$ とおくと，

$b_6=\dfrac{53}{215}$，$b_7=\dfrac{34}{171}$，$b_8=\dfrac{85}{511}$，$b_9=\dfrac{1}{7}$

よって，$0.0\dot{2}\dot{1}(n)=0.\dot{1}2\dot{5}_{(m)}$ となるとき，$n=4$，$m=9$，$x=\dfrac{1}{7}$ である。

次に，$x=\dfrac{1}{7}$ を 3 進法で表したとき，$0.c_1c_2c_3\cdots_{(3)}$ となったとすると，

$c_1=\left[3\times\frac{1}{7}\right]=\left[\frac{3}{7}\right]=0$，$c_2=\left[3\times\frac{3}{7}\right]=\left[1\frac{2}{7}\right]=1$，$c_3=\left[3\times\frac{2}{7}\right]=\left[\frac{6}{7}\right]=0$，$c_4=\left[3\times\frac{6}{7}\right]=\left[2\frac{4}{7}\right]=2$，

$c_5=\left[3\times\frac{4}{7}\right]=\left[1\frac{5}{7}\right]=1$，$c_6=\left[3\times\frac{5}{7}\right]=\left[2\frac{1}{7}\right]=2$，$c_7=\left[3\times\frac{1}{7}\right]=\left[\frac{3}{7}\right]=c_1$

（循環節 6 桁の循環小数となる。）

よって，$x=\frac{1}{7}$ を 3 進法で表すと，$0.\dot{0}1021\dot{2}$ 答

補足

(1)　$x=\frac{1}{7}{}_{(10)}=0.\dot{0}0\dot{1}_{(2)}=0.\dot{0}3241\dot{2}_{(5)}=0.\dot{0}\dot{5}_{(6)}=0.1_{(7)}=0.\dot{1}_{(8)}$

(2)　10 進数の分数（小数）x を n 進数で表す方法

例 1　$x=0.c_1c_2c_3\cdots_{(n)}=\frac{c_1}{n}+\frac{c_2}{n^2}+\frac{c_3}{n^3}+\cdots$ のとき，

両辺に n を掛けると，$nx=c_1+\frac{c_2}{n}+\frac{c_3}{n^2}+\cdots$　$\therefore c_1=[nx]$（[ ]はガウス記号）

$nx-c_1=\frac{c_2}{n}+\frac{c_3}{n^2}+\cdots$ の両辺に n を掛けると，$n(nx-c_1)=c_2+\frac{c_3}{n}+\frac{c_4}{n^2}+\cdots$　$\therefore c_2=[n(nx-c_1)]$

$n(nx-c_1)-c_2=\frac{c_3}{n}+\frac{c_4}{n^2}+\cdots$ の両辺に n を掛けると，

$n\{n(nx-c_1)-c_2\}=c_3+\frac{c_4}{n}+\frac{c_5}{n^2}+\cdots$　$\therefore c_3=[n\{n(nx-c_1)-c_2\}]$

以下同様に，c_4，c_5，…が求められる。

例 2　$0.3_{(10)}$ を 3 進法で表せ。

0 .	3
	3
0	9
	3
2	7
	3
2	1
	3
0	3
	3
0	9
	3
2	7

網掛けした部分
（循環節 4 桁）
が循環する小数
となる。

よって，$0.3_{(10)}=0.\dot{0}22\dot{0}_{(3)}$

(2023/9/17　ジョーカー)