n 進法

ある数を n 進法で表すと，循環小数 $0.\dot{0}2\dot{1}$ となり， m 進法で表すと，循環小数 $0.\dot{1}2\dot{5}$ となる。ある数を 3 進法で表すとどうなるか。ただし， m，n は 9 以下の自然数とする。

$\boxed{\text{解答}}$　a が n 進数であることを， $a_{(n)}$ で表す。特に a が 10 進数のときは a だけで表す。

ある数を x とおく。表示に使われている数字から， n は 3 以上， m は 6 以上の自然数である。（ n，$m \leqq 9$ ）

$$x = 0.\dot{0}2\dot{1}_{(n)} = \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{2}{n^5} + \frac{1}{n^6} + \cdots = \frac{\frac{2}{n^2}}{1-\frac{1}{n^3}} + \frac{\frac{1}{n^3}}{1-\frac{1}{n^3}} = \frac{2n+1}{n^3-1} = a_n$$ とおくと，

$$a_3 = \frac{7}{26}，\ a_4 = \frac{1}{7}，\ a_5 = \frac{11}{124}，\ a_6 = \frac{13}{215}，\ a_7 = \frac{5}{114}，\ a_8 = \frac{17}{511}，\ a_9 = \frac{19}{728}$$

同様に，

$$x = 0.\dot{1}2\dot{5}_{(m)} = \frac{1}{m} + \frac{2}{m^2} + \frac{5}{m^3} + \frac{1}{m^4} + \frac{2}{m^5} + \frac{5}{m^6} + \cdots = \frac{m^2+2m+5}{m^3-1} = b_m$$ とおくと，

$$b_6 = \frac{53}{215}，\ b_7 = \frac{34}{171}，\ b_8 = \frac{85}{511}，\ b_9 = \frac{1}{7}$$

よって， $0.\dot{0}2\dot{1}(n) = 0.\dot{1}2\dot{5}_{(m)}$ となるとき， $n = 4$， $m = 9$， $x = \frac{1}{7}$ である。

次に， $x = \frac{1}{7}$ を 3 進法で表したとき， $0.c_1c_2c_3\cdots_{(3)}$ となったとすると，

$$c_1 = \left[3\times\frac{1}{7}\right] = \left[\frac{3}{7}\right] = 0，\ c_2 = \left[3\times\frac{3}{7}\right] = \left[1\frac{2}{7}\right] = 1，\ c_3 = \left[3\times\frac{2}{7}\right] = \left[\frac{6}{7}\right] = 0，\ c_4 = \left[3\times\frac{6}{7}\right] = \left[2\frac{4}{7}\right] = 2，$$

$$c_5 = \left[3\times\frac{4}{7}\right] = \left[1\frac{5}{7}\right] = 1，\ c_6 = \left[3\times\frac{5}{7}\right] = \left[2\frac{1}{7}\right] = 2，\ c_7 = \left[3\times\frac{1}{7}\right] = \left[\frac{3}{7}\right] = c_1$$

（循環節 6 桁の循環小数となる。）

よって， $x = \frac{1}{7}$ を 3 進法で表すと， $0.\dot{0}1021\dot{2}$　$\boxed{\text{答}}$

$\boxed{\text{補足}}$

(1)　$x = \frac{1}{7}_{(10)} = 0.\dot{0}0\dot{1}_{(2)} = 0.\dot{0}3241\dot{2}_{(5)} = 0.\dot{0}\dot{5}_{(6)} = 0.1_{(7)} = 0.\dot{1}_{(8)}$

(2)　10 進数の分数（小数） x を n 進数で表す方法

$\boxed{\text{例}}$1　$x = 0.c_1c_2c_3\cdots_{(n)} = \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \frac{c_3}{n^3} + \cdots$ のとき，

両辺に n を掛けると， $nx = c_1 + \frac{c_2}{n} + \frac{c_3}{n^2} + \cdots$　$\therefore c_1 = [nx]$ （[ ] はガウス記号）

$nx - c_1 = \frac{c_2}{n} + \frac{c_3}{n^2} + \cdots$ の両辺に n を掛けると， $n(nx - c_1) = c_2 + \frac{c_3}{n} + \frac{c_4}{n^2} + \cdots$　$\therefore c_2 = [n(nx - c_1)]$

$n(nx - c_1) - c_2 = \frac{c_3}{n} + \frac{c_4}{n^2} + \cdots$ の両辺に n を掛けると，

$n\{n(nx - c_1) - c_2\} = c_3 + \frac{c_4}{n} + \frac{c_5}{n^2} + \cdots$　$\therefore c_3 = [n\{n(nx - c_1) - c_2\}]$

以下同様に，c_4，c_5，…が求められる。

$\boxed{例}$2　$0.3_{(10)}$ を 3 進法で表せ。

0 .	3
	3
0	9
	3
2	7
	3
2	1
	3
0	3
	3
0	9
	3
2	7

網掛けした部分
（循環節 4 桁）
が循環する小数
となる。

よって，$0.3_{(10)} = 0.\dot{0}22\dot{0}_{(3)}$

（2023/9/16　ジョーカー）