問題1　与式を 10 進数で表現すると、

$$2^{n+2} = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \Rightarrow 2^{n+2} = (n+1)^3$$

です。両辺の 3 乗根をとって、

$$2^{\frac{n+2}{3}} = n + 1$$

となます。nは奇数で、$n+2$が3の倍数であることがわかるので、$n = 6m + 1$(m は自然数)とおくことができます。すると、

$$2^{\frac{6m+1+2}{3}} = 6m + 1 + 1 \Rightarrow 2^{2m} = 3m + 1 \cdots ①$$

です。明らかに$m = 1$は 1 つの解ですが、$m > 1$の場合は二項定理を使えば、

$$2^{2m} = (1+1)^{2m} > \binom{2m}{0} + \binom{2m}{1} + \binom{2m}{2} = 2m^2 + m + 1$$

となりますから、①の左辺 − 右辺をやると、

$$左辺 - 右辺 = 2^{2m} - (3m+1) > 2m^2 + m + 1 - (3m+1) = 2m(m-1) > 0$$

なので、成り立たないことがわかります。よって、$m = 1$以外にあり得ないので、$n = 6m + 1 = 7$です。

問題2　前問と同様に、与式を 10 進数で表現すると、

$$\frac{3^n}{3^2} = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \Rightarrow 3^{n-2} = (n+1)^3$$

です。両辺の 3 乗根をとって、

$$3^{\frac{n-2}{3}} = n + 1$$

となます。nは偶数で、$n-2$が3の倍数であることがわかるので、$n = 6m + 2$(m は自然数)とおくことができます。すると、

$$3^{\frac{6m+2-2}{3}} = 6m + 2 + 1 \Rightarrow 3^{2m} = 6m + 3 \cdots ②$$

です。明らかに$m = 1$は 1 つの解ですが、$m > 1$の場合は、

$$3^{2m} = (1+2)^{2m} > \binom{2m}{0}2^0 + \binom{2m}{1}2^1 + \binom{2m}{2}2^2 = 8m^2 + 1$$

となりますから、②の左辺 − 右辺をやると、

$$左辺 - 右辺 = 3^{2m} - (6m+3) > 8m^2 + 1 - (6m+3) = 2(m-1)(4m+1) > 0$$

なので、成り立たないことがわかります。よって、$m = 1$以外にあり得ないので、$n = 6m + 2 = 8$です。

問題3　5 進数$xy.zzz\cdots$を 10 進数で表現すると、

$$N = 5^1x + 5^0y + 5^{-1}z + 5^{-2}z + 5^{-3}z + \cdots = 5x + y + (5^{-1} + 5^{-2} + 5^{-3} + \cdots)z$$

$$= 5x + y + \frac{5^{-1}}{1 - 5^{-1}}z = 5x + y + \frac{z}{4}\cdots ①$$

です。同様に、9 進数$zy.xxx\cdots$を 10 進数で表現すると、

$$N - 1 = 9^1z + 9^0y + 9^{-1}x + 9^{-2}x + 9^{-3}x + \cdots = 9z + y + (9^{-1} + 9^{-2} + 9^{-3} + \cdots)x$$

$$= 9z + y + \frac{9^{-1}}{1 - 9^{-1}}z = 9z + y + \frac{x}{8}\cdots ②$$

です。$① - ②$とすると。

$$1 = \frac{39x}{8} - \frac{35z}{4} \Rightarrow z = \frac{39x - 8}{70}$$

x, zは 5 進数の桁なので、$0 < x, z < 5$の整数を試してみると、

$\mathbf{x}$	$\mathbf{z = \frac{39x - 8}{70}}$
1	$\frac{31}{70}$
2	1
3	$\frac{109}{70}$
4	$\frac{74}{35}$

となり、色付けした箇所が適切な値となります。なお、yは 5 進数と 9 進数の 1 桁目なので、$0 \leq y < 5$であれば何でも構いません。

以上より、$x = 2, 0 \leq y < 5, z = 1$となります。

追加問題1　くじを引いて当たる確率をpとします。48 本引いて 7 本当たる確率をP_1、50 本引いて 9 本当たる確率をP_2とすると、

$$\mathrm{P}_1=\binom{48}{7}\mathrm{p}^7(1-\mathrm{p})^{48-7}、\mathrm{P}_2=\binom{50}{9}\mathrm{p}^9(1-\mathrm{p})^{50-9}$$

です。これらが等しいので、

$$\binom{48}{7}\mathrm{p}^7(1-\mathrm{p})^{48-7}=\binom{50}{9}\mathrm{p}^9(1-\mathrm{p})^{50-9}\Rightarrow 1=\frac{50\cdot 49}{9\cdot 8}\mathrm{p}^2\Rightarrow \mathrm{p}=\frac{6}{35}$$

です。ここで、$\mathrm{p}=\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{n}}$なので、

$$\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{n}}=\frac{6}{35}\Rightarrow \mathrm{n}=\frac{35}{6}\mathrm{a}$$

となり、nは35の倍数であることがわかります。$2023<\mathrm{n}<2050$の範囲内でこれを満たすのは$\mathrm{n}=2030$です。このとき、

$$\mathrm{a}=\frac{6}{35}\mathrm{n}=\frac{6}{35}\cdot 2030=348$$

です。以上より、$\mathrm{n}=2030$、$\mathrm{a}=348$です。

追加問題2　ある数をxとします。n進数の循環少数$0.\dot{0}2\dot{1}$を10進数で表すと、

$$x=\frac{0}{n^1}+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\frac{0}{n^4}+\frac{2}{n^5}+\frac{1}{n^6}+\cdots=\left(\frac{0}{n^1}+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)\left(1+\frac{0}{n^3}+\cdots\right)$$

$$=\left(\frac{0}{n^1}+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)\frac{1}{1-\frac{1}{n^3}}=\frac{2n+1}{n^3-1}$$

同様に、m進数の循環少数$0.\dot{1}2\dot{5}$を10進数で表すと、

$$x=\frac{1}{m^1}+\frac{2}{m^2}+\frac{5}{m^3}+\frac{1}{m^4}+\frac{2}{m^5}+\frac{5}{m^6}+\cdots=\left(\frac{1}{m^1}+\frac{2}{m^2}+\frac{5}{m^3}\right)\left(1+\frac{0}{m^3}+\cdots\right)$$

$$=\left(\frac{1}{m^1}+\frac{2}{m^2}+\frac{5}{m^3}\right)\frac{1}{1-\frac{1}{m^3}}=\frac{m^2+2m+5}{m^3-1}$$

です。これらを解けばよいのですが、よいアイデアが浮かびませんでした。ケース数が少ないので、$2<n\leq 8$、$5<m\leq 9$の整数で試すと、次ページの補足の通り、ある数は$x=\frac{1}{7}$で、$n=4$、$m=9$となりました。また、$9=3^2$なので、9 進数の 1 桁は 3 進数の 2 桁に対応します（プログラマにはお馴染みの 2⇔16 進数変換と同様です）。

9 進数	3 進数
0	00
1	01
2	02

9 進数	3 進数
3	10
4	11
5	12

9 進数	3 進数
6	20
7	21
8	22

この表に照らして変換すると、$0.\dot{1}2\dot{5}_{(9)}=0.\dot{0}1021\dot{2}_{(3)}$となります。以上より、求める 3 進数は$0.\dot{0}1021\dot{2}$です。

補足

n	$\mathbf{x = \frac{2n + 1}{n^3 - 1}}$
2	$\frac{5}{7}$
3	$\frac{7}{26}$
4	$\frac{1}{7}$
5	$\frac{11}{124}$
6	$\frac{13}{215}$
7	$\frac{5}{114}$
8	$\frac{17}{511}$

m	$\mathbf{x = \frac{m^2 + 2m + 5}{m^3 - 1}}$
5	$\frac{10}{31}$
6	$\frac{53}{215}$
7	$\frac{34}{171}$
8	$\frac{85}{511}$
9	$\frac{1}{7}$