● 問題 431 解答＜三角定規＞

［問題１］

<n進> $2^{12}=1331$ ⇔ <10進> $2^{n+2}=n^3+3n^2+3n+1=(n+1)^3$ …①

①の左辺の形より，右辺の n は　$n=2^m-1$ $(m=1,2,3,\cdots)$ の形のものに限られ，

① ⇔ $2^{2^m+1}=2^{3m}$ ⇔ $2^m+1=3m$ …②

②より $m=3$，このとき $n=\mathbf{7}$ …[答]

［問題２］

<n進> $\dfrac{3^{10}}{3^2}=1331$ ⇔ <10進> $\dfrac{3^n}{3^2}=3^{n-2}=n^3+3n^2+3n+1=(n+1)^3$ …③

③の左辺の形より，右辺の n は　$n=3^m-1$ $(m=1,2,3,\cdots)$ の形のものに限られ，

③ ⇔ $3^{3^m-3}=3^{3m}$ ⇔ $3^m-3=3m$ …④

④より $m=2$，このとき $n=\mathbf{8}$ …[答]

［問題３］題意より N を 10 進表記すると

$$N=5x+y+\frac{z}{5}+\frac{z}{5^2}+\frac{z}{5^3}+\cdots=5x+y+\frac{z}{4} \quad \cdots①$$

$$N=9z+1+y+\frac{x}{9}+\frac{x}{9^2}+\frac{x}{9^3}+\cdots=9z+1+y+\frac{x}{8} \quad \cdots②$$

ただし，$1\leqq x,\ z\leqq 4,\ 0\leqq y\leqq 4$ …③

①②③より，$x=2,\ z=1,\ y$ の値は定まらない。

以上より，$(x,\ y,\ z)=\mathbf{(2,\ 0,\ 1),\ (2,\ 1,\ 1),\ (2,\ 2,\ 1),\ (2,\ 3,\ 1),\ (2,\ 4,\ 1)}$ …[答]

［追加問題１］

題意より，くじが 1 回当たる確率は $\dfrac{a}{n}$ …①

48本引いて 7 本当たる確率 ${}_{48}\mathrm{C}_7\left(\dfrac{a}{n}\right)^7\left(1-\dfrac{n}{a}\right)^{41}$ …②

50本引いて 9 本当たる確率 ${}_{50}\mathrm{C}_9\left(\dfrac{a}{n}\right)^9\left(1-\dfrac{a}{n}\right)^{41}$ …③

②＝③ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{50\cdot 49}{9\cdot 8}\left(\dfrac{a}{n}\right)^2=1$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{5\cdot 7}{3\cdot 2}\cdot\dfrac{a}{n}=1$ $\therefore$ $\dfrac{35a}{6}=n$ …④

$2023<n<2050$ より $\dfrac{2023\cdot 6}{35}=346.8<a<\dfrac{2050\cdot 6}{35}=351.4\cdots$ …⑤

⑤および，④より a は 6 の倍数だから $a=\mathbf{348}$，このとき $n=\mathbf{2030}$ …[答]

［追加問題２］

<n進> $0.\dot{0}2\dot{1}$ $\Leftrightarrow$

<10進> $\dfrac{0}{n}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{0}{n^4}+\dfrac{2}{n^5}+\dfrac{1}{n^6}+\cdots$

$=\dfrac{2n+1}{n^3}\left(1+\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{1}{n^6}+\cdots\right)=\dfrac{2n+1}{n^3}\cdot\dfrac{1}{1-1/n^3}=\dfrac{2n+1}{n^3-1}$ …①

各位の数として 2 が使われていることから $3\leqq n$ （$\leqq 9$） …②

<m進> $0.\dot{1}2\dot{5}$ $\Leftrightarrow$

<10進> $\dfrac{1}{m}+\dfrac{2}{m^2}+\dfrac{5}{m^3}+\dfrac{1}{m^4}+\dfrac{2}{m^5}+\dfrac{5}{m^6}+\cdots$

$=\dfrac{m^2+2m+5}{m^3}\left(1+\dfrac{1}{m^3}+\dfrac{1}{m^6}+\cdots\right)=\dfrac{m^2+2m+5}{m^3}\cdot\dfrac{1}{1-1/m^3}=\dfrac{m^2+2m+5}{m^3-1}$ …③

各位の数として 5 が使われていることから $6\leqq n$ （$\leqq 9$） …④

②④の範囲で①及び③の値を計算すると

n	3	4	5	6	7	8	9
$\dfrac{2n+1}{n^3-1}$	$\dfrac{7}{26}$	$\dfrac{1}{7}$	$\dfrac{11}{124}$	$\dfrac{13}{215}$	$\dfrac{5}{114}$	$\dfrac{17}{511}$	$\dfrac{19}{728}$

m	6	7	8	9
$\dfrac{m^2+2m+5}{m^3-1}$	$\dfrac{53}{215}$	$\dfrac{34}{171}$	$\dfrac{87}{511}$	$\dfrac{1}{7}$

左の表より，ある数は $\dfrac{1}{7}$

$\dfrac{1}{7}$ を 3 進法で表す。$\dfrac{1}{7}=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{a_k}{3^k}=\dfrac{a_1}{3}+\dfrac{a_2}{3^2}+\dfrac{a_3}{3^3}+\cdots$ として

$\dfrac{1}{7}<\dfrac{1}{3}$ より $a_1=0$， $\dfrac{1}{3^2}<\dfrac{1}{7}<\dfrac{2}{3^2}$ より $a_2=1$， $\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{9}=\dfrac{2}{63}<\dfrac{1}{3^3}$ より $a_3=0$

$\dfrac{2}{3^4}<\dfrac{2}{63}<\dfrac{1}{3^3}$ より $a_4=2$，

$\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{3^2}-\dfrac{2}{3^4}=\dfrac{3^4-7\cdot 3^2-7\cdot 2}{7\cdot 3^4}=\dfrac{4}{7\cdot 3^4}$， $\dfrac{1}{3^5}<\dfrac{4}{7\cdot 3^4}<\dfrac{2}{3^5}$ より $a_5=1$

$\dfrac{4}{7\cdot 3^4}-\dfrac{1}{3^5}=\dfrac{4\cdot 3-7}{7\cdot 3^5}=\dfrac{5}{7\cdot 3^5}$, $\dfrac{2}{3^6}<\dfrac{5}{7\cdot 3^5}<\dfrac{1}{3^5}$ より $a_6=2$

$\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{2}{3^4}+\dfrac{1}{3^5}+\dfrac{2}{3^6}=\dfrac{104}{729}$, $\dfrac{1}{7}-\dfrac{104}{729}=\dfrac{729-728}{7\cdot 729}=\dfrac{1}{729}\cdot\dfrac{1}{7}=\dfrac{1}{3^4}\cdot\dfrac{1}{7}$

このことは，$\dfrac{1}{7}$ が $\dfrac{104}{3^6}$ を循環節とする循環小数であることを示している。

以上より，**ある数** $\left(=\dfrac{1}{7}\right)$ $=\mathbf{0.\dot{0}1021\dot{2}}$ …[答]