第 432 回

問題 1　<2019 年名古屋大学の入試問題の類題>

　数 n を自然数とする。正の平方根 $\sqrt{n}$ は整数でなく， それを 10 進法で表すと， 小数第 1 位は 0 であり， 第 2 位は 0 以外の数である。

(1)　このような n の中で最小な自然数 n を求めよ。

(2)　このような n を小さい順に並べたとき， 100 番目の自然数 n を求めよ。

(3)　$n=2026$ のとき， 上の条件を満たすが， n を小さい順に並べたとき，何番目かを求めよ。

問題 2　<類題>

　数 n を自然数とする。正の平方根 $\sqrt{n}$ は整数でなく， それを 10 進法で表すと， 小数第 1 位と第 2 位は 0 であり，第 3 位は 0 以外の数である。このような n の中で最小な自然数 n を求めよ。

解答

問題 1

(1)　$\sqrt{n}$ の整数部分を m とすると，$\sqrt{n}$ が整数でないことから，$m<\sqrt{n}<m+1$

　各辺を 2 乗して　　$m^2<n<m^2+2m+1$

　よって，n は $n=m^2+1,\ m^2+2,\ \cdots,\ m^2+2m$ の形で表される整数である。

　また，$\sqrt{n}$ を 10 進法で表したとき，小数第 1 位は 0 であり，第 2 位は 0 以外の数であることから，

　$0.01\leqq\sqrt{n}-m<0.1$　$\therefore m+0.01\leqq\sqrt{n}<m+0.1$

　各辺を 2 乗して，$m^2+0.02m+0.0001\leqq n<m^2+0.2m+0.01$　…①

　$n=m^2+r\ (r=1,\ 2,\ \cdots,\ 2m)$　…②とし，① に代入して整理すると，$0.02m+0.0001\leqq r<0.2m+0.01$

　m について解くと　　$5r-0.05<m\leqq 50r-0.005$

　これを満たす整数 m は $5r\leqq m\leqq 50r-1$　…③である。

②より， $r\leqq 2m$ であるから， $m^2+r\leqq m^2+2m<(m+1)^2+1$ である。

　n が最小となるのは，$m=5$ ， $r=1$ のときで，$n=5^2+1=26$　答

補足　$\sqrt{26}=5.099\cdots$

(2)　③において，

　$r=1$ のとき， $m=5$ から次第に大きくなる。

　$r=2$ のとき， $m=10$ から次第に大きくなる。 $r=1$ に比べ，その差 5 個。

　$r=3$ のとき， $m=15$ から次第に大きくなる。 $r=2$ に比べ，その差 5 個。

　……………………………………………………………………………………

　よって m の値を 5 個ずつまとめて考える。

　$m=5,\ 6,\ \cdots,\ 9$ を第 1 群（ $r=1$ ）， $m=10,\ 11,\ \cdots,\ 14$ を第 2 群（ $r=1,\ 2$ ）， $m=15,\ 16,\ \cdots,\ 19$ を第 3 群（ $r=1,\ 2,\ 3$ ）， …とする。

　第 1 群から第 k 群までに属する数の総数は， $5+5\cdot2+\cdots 5k=5\times\dfrac{1}{2}k(k+1)>100$ とおくと，

　$k=6$ （最小の k の値）

　このとき， $5+5\cdot2+\cdots 5\cdot6=105$（ 5 個多い！）

　②より， $r\leqq 2m$ であるから， $m^2+r\leqq m^2+2m<(m+1)^2+1$ である。

　この 105 個の中で 1 番大きいのは第 6 群の数で， 34^2+6 である。

　105 個の値の中から大きい順に 5 個（ 34^2+6 ， 34^2+5 ， 34^2+4 ， 34^2+3 ， 34^2+2 ）取り除くと，

小さい順に並べたとき，100 番目の自然数は，$n=34^2+1=1157$　答

補足　$\sqrt{1157}=34.014\cdots$

(3)　$\sqrt{2026}=45.011\cdots$ より，条件を満たす。

$2026=45^2+1$，$45=5\cdot 9$ であるから，2026 は第 9 群の中で 1 番小さい数である。

第 1 群から第 8 群までに属する数の総数は，$5+5\cdot 2+\cdots 5\cdot 8=180$（個）

よって，2026 は小さい順に並べたとき，$180+1=181$ 番目の数　答

問題 2

$\sqrt{n}$ の整数部分を m とすると，$\sqrt{n}$ が整数でないことから，$m<\sqrt{n}<m+1$

各辺を 2 乗して，$m^2<n<m^2+2m+1$

よって，n は $n=m^2+1,\ m^2+2,\ \cdots,\ m^2+2m$ の形で表される整数である。

また，$\sqrt{n}$ を 10 進法で表したとき，小数第 1 位と第 2 位は 0 であり，第 3 位は 0 以外の数であることから，

$0.001\leqq\sqrt{n}-m<0.01$　$\therefore m+0.001\leqq\sqrt{n}<m+0.01$

各辺を 2 乗して，$m^2+0.002m+0.000001\leqq n<m^2+0.02m+0.0001$　…①

$n=m^2+r\ (r=1,\ 2,\ \cdots,\ 2m)$　…②とし，① に代入して整理すると，$0.002m+0.000001\leqq r<0.02m+0.0001$

m について解くと　$50r-0.005<m\leqq 500r-0.0005$

これを満たす整数 m は $50r\leqq m\leqq 500r-1$　…③である。

②より，$r\leqq 2m$ であるから，$\underline{m^2+r}\leqq m^2+2m<\underline{(m+1)^2+1}$ である。

③より，n が最小となるのは，$r=1$，$m=50$ のときで，$n=50^2+1=2501$

よって，求める最小の自然数 n は，$n=2501$　答

補足　$\sqrt{2501}=50.0099\cdots$

参考

(1)　$\sqrt{3^2+1}=\sqrt{10}=3.\underline{1}622776$　　(2)　$\sqrt{8^2+2}=\sqrt{66}=8.\underline{12}40384$

(3)　$\sqrt{4^2+1}=\sqrt{17}=4.\underline{123}1056$　　(4)　$\sqrt{85^2+21}=\sqrt{7246}=85.\underline{1234}3978$，

(5)　$\sqrt{247^2+61}=\sqrt{61070}=247.\underline{12345}09$　　(6)　$\sqrt{1867^2+461}=\sqrt{3486150}=1867.\underline{123456}0146257238$

(7)　$\sqrt{16123^2+3981}=\sqrt{259955110}=16123.\underline{1234567}00317656$

(8)　$\sqrt{143050^2+35321}=\sqrt{20463337821}=143050.\underline{12345678}000148$

(9)　$\sqrt{4049256^2+999821}=\sqrt{16396629025446}=4049356.\underline{123456789}76587426894$

追加問題 1
N 本のうち M 本が当たるくじがある。 (1)　これから n 本引いて r 本当たる確率 p を求めよ。 (2)　$\dfrac{M}{N}=p$，$1-p=q$ とするとき，$\displaystyle\lim_{N\to\infty}p$ の値を求めよ。

解答

(1)　当たりくじを r 本引く方法は，${}_M C_r$ 通り，この各々の場合に残り $(n-r)$ 本のはずれを引く方法は ${}_{N-M}C_{n-r}$ 通り，

従って求める確率は，$p=\dfrac{{}_M C_r\times{}_{N-M}C_{n-r}}{{}_N C_n}$　答　…①

(2) $\dfrac{M}{N}=p$ であるから， $M=Np$ ， $N-M=Nq$ を用いると，

$${}_MC_r=\frac{Np(Np-1)\cdots(Np-r+1)}{r!}\text{，}\quad {}_{N-M}C_{n-r}=\frac{Nq(Nq-1)\cdots(Nq-n+r+1)}{(n-r)!}\text{，}$$

${}_NC_n=\dfrac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{n!}$ であるから，これらを①に代入すると，

$$p=\frac{n!}{r!(n-r)!}\times\frac{\{Np(Np-1)\cdots(Np-r+1)\}\{Nq(Nq-1)\cdots(Nq-n+r+1)\}}{N(N-1)\cdots(N-n+1)}$$

ここで， $\dfrac{n!}{r!(n-r)!}={}_nC_r$ は N に無関係で，後ろの分数の分母・分子を N^n で割ると，

$$p={}_nC_r\times\frac{\left\{p\left(p-\frac{1}{N}\right)\cdots\left(p-\frac{r-1}{N}\right)\right\}\left\{q\left(q-\frac{1}{N}\right)\cdots\left(q-\frac{n-r-1}{N}\right)\right\}}{1\cdot\left(1-\frac{1}{N}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{N}\right)}\to{}_nC_r\times p^rq^{n-r}\quad(N\to\infty)$$

よって， $\displaystyle\lim_{N\to\infty}p={}_nC_r\,p^rq^{n-r}$ 答

追加問題２ $f(x)=(1-x)(1-3x)(1-5x)\cdots\{1-(2n-1)x\}$ を展開したときの x， x^2， x^3， x^4 の係数を求めよ。 また， x^n の係数を考えてください。

解答 $f(x)=(1-x)(1-3x)(1-5x)\cdots\{1-(2n-1)x\}$ …①

$f(x)$ を展開すると，

$$f(x)=1-a_1x+a_2x^2-a_3x^3+\cdots+(-1)^na_nx^n=1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^ka_kx^k\quad\cdots②$$

となる。 $a_k>0$ （ $k=1,2,\cdots,n$ ）

$f(0)=1$ である。

②の両辺を x で次々と微分していく。

$f'\ x=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^kka_kx^{k-1}$ より， $f'(0)=-a_1$

$f''\ x=\displaystyle\sum_{k=2}^{n}(-1)^kk(k-1)a_kx^{k-2}$ より， $f''(0)=2a_2$

$f'''\ x=\displaystyle\sum_{k=3}^{n}(-1)^kk(k-1)(k-2)a_kx^{k-3}$ より， $f'''(0)=-6a_3$

$f^{(4)}\ x=\displaystyle\sum_{k=4}^{n}(-1)^kk(k-1)(k-2)(k-3)a_kx^{k-4}$ より， $f^{(4)}(0)=24a_4$

まとめると， $\boxed{f(0)=1\text{，}\ f'(0)=-a_1\text{，}\ f''(0)=2a_2\text{，}\ f'''(0)=-6a_3\text{，}\ f^{(4)}(0)=24a_4}$ …★

次に，①の両辺に絶対値を付け，両辺の対数をとると，

$$\log|f(x)|=\log|(1-x)(1-3x)(1-5x)\cdots\{1-(2n-1)x\}|=\sum_{k=1}^{n}\log|1-(2k-1)x|$$

両辺を x で微分すると，

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{-(2k-1)}{1-(2k-1)x}\quad\cdots③\text{より，}\quad\frac{f'(0)}{f(0)}=-\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=-n^2$$

★より，$\dfrac{-a_1}{1}=-n^2$　$\therefore \boxed{a_1=n^2}$　…③′

③の両辺を x で微分すると，$\dfrac{f(x)f''(x)-f'(x)^2}{f(x)^2}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{-(2k-1)^2}{\{1-(2k-1)x\}^2}$　…④より，

$x=0$ を代入すると，$\dfrac{f(0)f''(x)-f'(0)^2}{f(0)^2}=-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=-\dfrac{1}{3}n(4n^2-1)$ (*)

★より，$\dfrac{1\cdot 2a_2-(-a_1)^2}{1^2}=-\dfrac{1}{3}n(4n^2-1)$

③を代入すると，$2a_2-(-n^2)^2=-\dfrac{1}{3}n(4n^2-1)$　$\therefore \boxed{a_2=\dfrac{1}{6}(n-1)n(3n^2-n-1)}$　…④′

④の両辺を x で微分すると，$\dfrac{f(x)^2f'''(x)-3f(x)f'(x)f''(x)+2f'(x)^3}{f(x)^3}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{-2(2k-1)^3}{\{1-(2k-1)x\}^3}$　…⑤より，

$x=0$ を代入すると，$\dfrac{f(0)^2f'''(0)-3f(0)f'(0)f''(0)+2f'(0)^3}{f(0)^3}=-2\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3=-2n^2(2n^2-1)$ (*)

★より，$\dfrac{1^2\cdot(-6a_3)-3\cdot 1\cdot(-a_1)\cdot 2a_2+2(-a_1)^3}{1^3}=-2n^2(2n^2-1)$

③′，④′を代入すると，$-6a_3-3(-n^2)\cdot 2\cdot\dfrac{1}{6}(n-1)n(3n^2-n-1)+2(-n^2)^3=-2n^2(2n^2-1)$

$\therefore \boxed{a_3=\dfrac{1}{6}(n-2)(n-1)n^2(n^2-n-1)}$　…⑤′

⑤の両辺を x で微分すると，

$$\frac{f(x)^3f^{(4)}(x)-4f(x)^2f'(x)f'''(x)-3f(x)^2f''(x)^2+12f(x)f'(x)^2f''(x)-6f'(x)^4}{f(x)^4}=\sum_{k=1}^{n}\frac{-6(2k-1)^4}{\{1-(2k-1)x\}^4}\quad\cdots⑥$$

$x=0$ を代入すると，

$$\frac{f(0)^3f^{(4)}(0)-4f(0)^2f'(0)f'''(0)-3f(0)^2f''(0)^2+12f(0)f'(0)^2f''(x)-6f'(0)^4}{f(0)^4}=-6\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^4$$

$$=-\frac{2}{5}n(2n-1)(2n+1)(12n^2-7)\ (*)$$

★より，

$$\frac{1^3\cdot 24a_4-4\cdot 1^2\cdot(-a_1)(-6a_3)-3\cdot 1^2\cdot(2a_2)^2+12\cdot 1\cdot(-a_1)^2(2a_2)-6(-a_1)^4}{1^4}=-\frac{2}{5}n(2n-1)(2n+1)(12n^2-7)$$

③′，④′，⑤′より，

$24a_4-24(-n^2)\cdot\dfrac{1}{6}(n-2)(n-1)n^2(n^2-n-1)-3\left\{2\cdot\dfrac{1}{6}(n-1)n(3n^2-n-1)\right\}^2+24(-n^2)^2\cdot\dfrac{1}{6}(n-1)n(3n^2-n$

$-1)-6(-n^2)^4=-\dfrac{2}{5}n(2n-1)(2n+1)(12n^2-7)$

$\therefore a_4=\dfrac{1}{360}(n-3)(n-2)(n-1)n(15n^4-30n^3-25n^2+12n+7)$　…⑥′

よって，x，x^2，x^3，x^4 の係数は，

x ： $-n^2$，x^2 ： $\dfrac{1}{6}(n-1)n(3n^2-n-1)$，$x^3$ ： $-\dfrac{1}{6}(n-2)(n-1)n^2(n^2-n-1)$

x^4 ： $\dfrac{1}{360}(n-3)(n-2)(n-1)n(15n^4-30n^3-25n^2+12n+7)$　答

最後に，x^n の係数は，$(-1)\cdot(-3)\cdot(-5)\cdot\cdots\cdot\{-(2n-1)\}=(-1)^n\cdot\dfrac{(2n)!}{2^n n!}$ 答

(*)

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ はよく知られている。

また，恒等式 $(k+1)^5-k^5=5k^4+10k^3+10k^2+5k+1$ を利用すると，

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$ が得られる。

一方，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^m+\sum_{k=1}^{n}(2k)^m=\sum_{k=1}^{2n}k^m$ より，$\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^m=\sum_{k=1}^{2n}k^m-2^m\sum_{k=1}^{n}k^m}$ であるから，

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=\sum_{k=1}^{2n}k^2-2^2\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}\cdot2n(2n+1)(4n+1)-4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$

同様に，

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3=n^2(2n^2-1)$，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^4=\frac{1}{15}n(2n-1)(2n+1)(12n^2-7)$ が得られる。

$(1-x)(1-3x)(1-5x)\cdots\{1-(2n-1)x\}$ を展開したときの各項の係数の求め方について

解答 $(1-x)(1-3x)(1-5x)\cdots\{1-(2n-1)x\}=f_n(x)$ とおき，奇数次の項の係数は負，偶数次の項の係数は正となるから，$f_n(x)=1-a(1,\ n)x+a(2,\ n)x^2-a(3,\ n)x^3+\cdots+(-1)^n a(n,\ n)x^n$ とおく。

ただし，$(-1)^i a(i,\ n)$ は x^n の係数（$i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$）である。

このとき，

$f_{n+1}(x)=1-a(1,\ n+1)x+a(2,\ n+1)x^2-a(3,\ n+1)x^3+\cdots+(-1)^{n+1}a(n+1,\ n+1)x^{n+1}$ …①

となる。

一方

$f_{n+1}(x)=f_n(x)\{1-(2n+1)x\}=\{1-a(1,\ n)x+a(2,\ n)x^2-a(3,\ n)x^3+\cdots+(-1)^n a(n,\ n)x^n\}\{1-(2n+1)x\}$

$=1-\{a(1,\ n)+2n+1\}x+\{a(2,\ n)+(2n+1)a(1,\ n)\}x^2-\{a(3,\ n)+(2n+1)a(2,\ n)\}x^3+\cdots$

$+(-1)^{n+1}(2n+1)a(n,\ n)x^{n+1}$ …②

であるから，①と②の同次の項の係数を比較して，

$a(1,\ n+1)=a(1,\ n)+2n+1$ …[1]

$a(2,\ n+1)=a(2,\ n)+(2n+1)a(1,\ n)$ …[2]

$a(3,\ n+1)=a(3,\ n)+(2n+1)a(2,\ n)$ …[3]

…………………………………………………………………

$a(i,\ n+1)=a(i,\ n)+(2n+1)a(i-1,\ n)$ …[i]

…………………………………………………………………

$a(n,\ n+1)=a(n,\ n)+(2n+1)a(n-1,\ n)$ …[n]

$a(n+1,\ n+1)=(2n+1)a(n,\ n)$ …[$n+1$]

[1] は階差数列の漸化式である。$a(1,\ 1)=1$ であるから，

$n\geqq2$ のとき，$a(1,\ n)=1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)=n^2$

この結果の式は，$n=1$ のときにも成り立つ。

よって，$\boxed{a(1,\ n)=n^2}$

$i \geqq 2$ のときも同様に，階差数列の漸化式 $\boxed{a(i,\ n)=a(i,\ i)+\displaystyle\sum_{k=i}^{n-1}(2k+1)\cdot a(i-1,\ k)}$ $\cdots$★

から，順次，求めていくことができる。

[2]　まず，$a(2,\ 2)=3$ である。[1] の結果を★に適用して，

$$a(2,\ n)=3+\sum_{k=2}^{n-1}(2k+1)k^2=\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)k^2=\frac{1}{6}(n-1)n(3n^2-n-1)$$

この結果の式は，$n=2$ のときにも成り立つ。

よって，$\boxed{a(2,\ n)=\dfrac{1}{6}(n-1)n(3n^2-n-1)}$

[3]　まず，$a(3,\ 3)=15$ である。[2] の結果を★に適用して，

$$a(3,\ n)=15+\sum_{k=3}^{n-1}(2k+1)\cdot\frac{1}{6}(k-1)k(3k^2-k-1)=\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)\cdot\frac{1}{6}(k-1)k(3k^2-k-1)$$

$$=\frac{1}{6}(n-2)(n-1)n^2(n^2-n-1)$$

この結果の式は，$n=3$ のときにも成り立つ。

よって，$\boxed{a(3,\ n)=\dfrac{1}{6}(n-2)(n-1)n^2(n^2-n-1)}$

[4]　まず，$a(4,\ 4)=105$ である。[3] の結果を★に適用して，

$$a(4,\ n)=105+\sum_{k=4}^{n-1}(2k+1)\cdot\frac{1}{6}(k-2)(k-1)k^2(k^2-k-1)=\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)\cdot\frac{1}{6}(k-2)(k-1)k^2(k^2-k-1)$$

$$=\frac{1}{360}(n-3)(n-2)(n-1)n(15n^4-30n^3-25n^2+12n+7)$$

この結果の式は，$n=4$ のときにも成り立つ。

よって，$\boxed{a(4,\ n)=\dfrac{1}{360}(n-3)(n-2)(n-1)n(15n^4-30n^3-25n^2+12n+7)}$

[5]　まず，$a(5,\ 5)=945$ である。[4] の結果を★に適用して，

$$a(5,\ n)=945+\sum_{k=5}^{n-1}(2k+1)\cdot\frac{1}{360}(k-3)(k-2)(k-1)k(15k^4-30k^3-25k^2+12k+7)$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)\cdot\frac{1}{360}(k-3)(k-2)(k-1)k(15k^4-30k^3-25k^2+12k+7)$$

$$=\frac{1}{360}(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n^2(3n^4-10n^3-5n^2+12n+7)$$

この結果の式は，$n=5$ のときにも成り立つ。

よって，$\boxed{a(5,\ n)=\dfrac{1}{360}(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n^2(3n^4-10n^3-5n^2+12n+7)}$

[6]　まず，$a(6,\ 6)=10395$ である。[5] の結果を★に適用して，

$$a(6,\ n)=10395+\sum_{k=6}^{n-1}(2k+1)\cdot\frac{1}{360}(k-4)(k-3)(k-2)(k-1)k^2(3k^4-10k^3-5k^2+12k+7)$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)\cdot\frac{1}{360}(k-4)(k-3)(k-2)(k-1)k^2(3k^4-10k^3-5k^2+12k+7)$$

$$=\frac{1}{45360}(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n(63n^6-315n^5+721n^3+294n^2-205n-93)$$

この結果の式は，$n=6$ のときにも成り立つ。

よって，$\boxed{a(6,\ n)=\dfrac{1}{45360}(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n(63n^6-315n^5+721n^3+294n^2-205n-93)}$

[7]　まず，$a(7,\ 7)=135135$ である。[6] の結果を★に適用して，

$$a(7,\ n)=135135+\sum_{k=7}^{n-1}(2k+1)\cdot\frac{1}{45360}(k-5)(k-4)(k-3)(k-2)(k-1)k(63k^6-315k^5+721k^3+294k^2-205k-93)$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)\cdot\frac{1}{45360}(k-5)(k-4)(k-3)(k-2)(k-1)k(63k^6-315k^5+721k^3+294k^2-205k-93)$$

$$=\frac{1}{45360}(n-6)(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n^2(9n^6-63n^5+42k^4+217n^3-205n-93)$$

この結果の式は，$n=7$ のときにも成り立つ。

よって，$\boxed{a(7,\ n)=\dfrac{1}{45360}(n-6)(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n^2(9n^6-63n^5+42k^4+217n^3-205n-93)}$

以下，時間さえあれば $a(8,\ n)$ 以降も計算することが可能である。

最後に，$a(n,\ n)=1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)=\dfrac{(2n)!}{2^n\cdot n!}$ である。

$(1-x)(1-3x)(1-5x)\cdots\{1-(2n-1)x\}$ を展開したときの x，x^2，…，x^7 までの係数（まとめ）

項		係数
x	：	$-n^2$
x^2	：	$\dfrac{1}{6}(n-1)n(3n^2-n-1)$
x^3	：	$-\dfrac{1}{6}(n-2)(n-1)n^2(n^2-n-1)$
x^4	：	$\dfrac{1}{360}(n-3)(n-2)(n-1)n(15n^4-30n^3-25n^2+12n+7)$
x^5	：	$-\dfrac{1}{360}(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n^2(3n^4-10n^3-5n^2+12n+7)$
x^6	：	$\dfrac{1}{45360}(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n(63n^6-315n^5+721n^3+294n^2-205n-93)$
x^7	：	$-\dfrac{1}{45360}(n-6)(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n^2(9n^6-63n^5+42k^4+217n^3-205n-93)$
x^n	：	$(-1)^n\cdot\dfrac{(2n)!}{2^n\cdot n!}$

(2023/10/15　ジョーカー)