問題1　$\sqrt{n}$の第1位は0であり、第2位は0以外なので、適当な自然数mが存在して、

$$m + 0.01 \leq \sqrt{n} < m + 0.1 \Rightarrow \left(m + \frac{1}{100}\right)^2 \leq \sqrt{n} < \left(m + \frac{1}{10}\right)^2$$

$$\Rightarrow m^2 + \frac{m}{50} + \frac{1}{10000} \leq n < m^2 + \frac{m}{5} + \frac{1}{100} \cdots ①$$

と表すことができます。これを満たすには、$m \geq 5$でなければなりません。

また、$\sqrt{n}$は平方数ではないので、

$$m^2 + 1 \leq n < (m+1)^2 \cdots ②$$

も満たす必要がありますが、ひとまず、$m < 50$とすれば、

$$m^2 + \frac{m}{50} + \frac{1}{10000} < m^2 + 1$$

です。また、

$$\left(m + \frac{1}{10}\right)^2 < (m+1)^2$$

なので、$5 \leq m < 50$に限定すれば、

$$m^2 + 1 \leq n < \left(m + \frac{1}{10}\right)^2 \Rightarrow m^2 + 1 \leq n \leq m^2 + \left[\frac{m}{5}\right] \cdots ③$$

の範囲を調べれば良いことになります。数列には規則性があって、次ページに示した表のように、mが 5 の倍数ごとに③に含まれる要素数が 1 つずつ増えていくことがわかります。この表から、答えは以下の通りです。

(1)$n = 26$

(2)$n = 1157$

(3)181 番目

問題2　前問と同様に考えると、

$$m + 0.001 \leq \sqrt{n} < m + 0.01 \Rightarrow \left(m + \frac{1}{1000}\right)^2 \leq \sqrt{n} < \left(m + \frac{1}{100}\right)^2$$

$$\Rightarrow m^2 + \frac{m}{500} + \frac{1}{1000000} \leq n < m^2 + \frac{m}{50} + \frac{1}{10000} \cdots ④$$

となる自然数mが存在します。これを満たすには、$m \geq 50$でなければなりません。試みに$m = 50$とすると、$50^2 = 2500 \leq n$ですが、②も満たす必要があるので、$50^2 + 1 = 2501 \leq n$です。ゆえに、最小値は2501となります。

m	n								
5	26(1)								
6	37(2)								
7	50(3)								
8	65(4)								
9	82(5)								
10	101(6)	102(7)							
11	122(8)	123(9)							
12	145(10)	146(11)							
13	170(12)	171(13)							
14	197(14)	198(15)							
15	226(16)	227(17)	228(18)						
16	257(19)	258(20)	259(21)						
17	290(22)	291(23)	292(24)						
18	325(25)	326(26)	327(27)						
19	362(28)	363(29)	364(30)						
20	401(31)	402(32)	403(33)	404(34)					
21	442(35)	443(36)	444(37)	445(38)					
22	485(39)	486(40)	487(41)	488(42)					
23	530(43)	531(44)	532(45)	533(46)					
24	577(47)	578(48)	579(49)	580(50)					
25	626(51)	627(52)	628(53)	629(54)	630(55)				
26	677(56)	678(57)	679(58)	680(59)	681(60)				
27	730(61)	731(62)	732(63)	733(64)	734(65)				
28	785(66)	786(67)	787(68)	788(69)	789(70)				
29	842(71)	843(72)	844(73)	845(74)	846(75)				
30	901(76)	902(77)	903(78)	904(79)	905(80)	906(81)			
31	962(82)	963(83)	964(84)	965(85)	966(86)	967(87)			
32	1025(88)	1026(89)	1027(90)	1028(91)	1029(92)	1030(93)			
33	1090(94)	1091(95)	1092(96)	1093(97)	1094(98)	1095(99)			
34	1157(100)	1158(101)	1159(102)	1160(103)	1161(104)	1162(105)			
35	1226(106)	1227(107)	1228(108)	1229(109)	1230(110)	1231(111)	1232(112)		
36	1297(113)	1298(114)	1299(115)	1300(116)	1301(117)	1302(118)	1303(119)		
37	1370(120)	1371(121)	1372(122)	1373(123)	1374(124)	1375(125)	1376(126)		
38	1445(127)	1446(128)	1447(129)	1448(130)	1449(131)	1450(132)	1451(133)		
39	1522(134)	1523(135)	1524(136)	1525(137)	1526(138)	1527(139)	1528(140)		
40	1601(141)	1602(142)	1603(143)	1604(144)	1605(145)	1606(146)	1607(147)	1608(148)	
41	1682(149)	1683(150)	1684(151)	1685(152)	1686(153)	1687(154)	1688(155)	1689(156)	
42	1765(157)	1766(158)	1767(159)	1768(160)	1769(161)	1770(162)	1771(163)	1772(164)	
43	1850(165)	1851(166)	1852(167)	1853(168)	1854(169)	1855(170)	1856(171)	1857(172)	
44	1937(173)	1938(174)	1939(175)	1940(176)	1941(177)	1942(178)	1943(179)	1944(180)	
45	2026(181)	2027(182)	2028(183)	2029(184)	2030(185)	2031(186)	2032(187)	2033(188)	2034(189)

()内の数は順番です。

追加問題1

(1)M本の当たりからr本を引く場合数は$\binom{M}{r}$、$N-M$本の外れから$n-r$本を引く場合数は$\binom{N-M}{n-r}$、N本のくじからn本を引く場合数は$\binom{N}{n}$なので、求める確率Pは、

$$P=\frac{\binom{M}{r}\binom{N-M}{n-r}}{\binom{N}{n}}$$

となります。

(2)(1)で求めた式は扱い難いので、引いたn本のくじの中に、r本の当たりと$n-r$本の外れがあると考えると、

$$P_N=\binom{n}{r}\prod_{k=0}^{r-1}\frac{M-k}{N-k}\prod_{k=0}^{n-r-1}\frac{N-M-k}{N-r-k}$$

$$=\binom{n}{r}\prod_{k=0}^{r-1}\frac{\frac{M}{N}-\frac{k}{N}}{1-\frac{k}{N}}\prod_{k=0}^{n-r-1}\frac{1-\frac{M}{N}-\frac{k}{N}}{1-\frac{r+k}{N}}=\binom{n}{r}\prod_{k=0}^{r-1}\frac{p-\frac{k}{N}}{1-\frac{k}{N}}\prod_{k=0}^{n-r-1}\frac{q-\frac{k}{N}}{1-\frac{r+k}{N}}$$

と表すことができます。この式で、Nを∞に近づけると、

$$P=\lim_{N\to\infty}P_N=\lim_{N\to\infty}\binom{n}{r}\prod_{k=0}^{r-1}\frac{p-\frac{k}{N}}{1-\frac{k}{N}}\prod_{k=0}^{n-r-1}\frac{q-\frac{k}{N}}{1-\frac{r+k}{N}}=\binom{n}{r}\prod_{k=0}^{r-1}p\prod_{k=0}^{n-r-1}q=\binom{n}{r}p^rq^{n-r}$$

です。

追加問題2　xの係数は、定数項-1と$-x, -3x, -5x, \cdots, (2n-1)x$の積和なので、

$$1 \times \{-x-3x-5x-\cdots-(2n-1)\} = -\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = -n^2$$

です。x^2の係数も同様に考えて、

$$\begin{array}{rcr} -x & \times & \{-3x-5x-7x-\cdots-(2n-1)\} \\ -3x & \times & \{-5x-7x-\cdots-(2n-1)\} \\ -5x & \times & \{-7x-\cdots-(2n-1)\} \\ & \cdots\cdots & \\ -(2n-3)x & \times & \{(2n-1)\} \end{array}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left\{(2k-1)\sum_{i=1}^{k-1}(2i-1)\right\} = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)(k-1)^2 = \frac{(n-1)n(3n^2-n-1)}{6}$$

です。上記の考察で、大よそ規則性が見えてきます。次数が上がるごとに、係数の数式には、Σがネストさていくので、x^3の係数は、

$$-\sum_{k=1}^{n}\left[(2k-1)\sum_{i=1}^{k-1}\left\{(2i-1)\sum_{j=1}^{i-1}(2j-1)\right\}\right] = -\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\frac{(k-2)(k-1)(3k^2-7k+3)}{6}$$

$$= -\frac{(n-2)(n-1)n^2(n^2-n-1)}{6}$$

です。同様にして、x^4の係数は、

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{(2k-1)\sum_{i=1}^{k-1}\left[(2i-1)\sum_{j=1}^{i-1}\left\{(2j-1)\sum_{m=1}^{j-1}(2m-1)\right\}\right]\right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(2k-1)\frac{((k-1)^2-k)(k-3)(k-2)(k-1)^2}{6}$$

$$= \frac{(n-3)(n-2)(n-1)n(15n^4-30n^3-25n^2+12n+7)}{360}$$

です。x^nの係数は、符号を無視して二重階乗で表現すると、$(2n-1)!!$ですが、二重階乗を使わずに表現してみます。$(2n)!!$は、

$$(2n)!! = 2n \times (2n-2) \times \cdots \times 2 = 2^n n!$$

と表現できるので、

$$(2n)! = (2n)!! \times (2n-1)!! \Rightarrow (2n-1)!! = \frac{(2n)!}{(2n)!!} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

となります。ここで符号を考慮して、$(-1)^n$を乗じておきます。以上の結果を整理すると、次ページの通りです。

次数	係数
$\mathbf{x}$	$-n^2$
$\mathbf{x^2}$	$\dfrac{(n-1)n(3n^2-n-1)}{6}$
$\mathbf{x^3}$	$-\dfrac{(n-2)(n-1)n^2(n^2-n-1)}{6}$
$\mathbf{x^4}$	$\dfrac{(n-3)(n-2)(n-1)n(15n^4-30n^3-25n^2+12n+7)}{360}$
$\mathbf{x^n}$	$(-1)^n\dfrac{(2n)!}{2^n n!}$