$\sqrt{n}$に最も近い整数をmとすると、

$$m-\frac{1}{2}<\sqrt{n}<m+\frac{1}{2}\cdots ①$$

と表すことができます。両辺を 2 乗すると、

$$\left(m-\frac{1}{2}\right)^2<n<\left(m+\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow m^2-m+\frac{1}{4}<n<m^2+m+\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow m^2-m+1<n<m^2+m$$

となりますから、$a_n=m$となるa_nの個数は

$$m^2+m-(m^2-m+1)+1=2m$$

です。なお、①式に等号は含まれません。もし等号が含まれると、

$$m-\frac{1}{2}=\sqrt{n}\Rightarrow\left(m-\frac{1}{2}\right)^2=n\Rightarrow m^2-m+\frac{1}{4}=n$$

となり、nが整数ではなくなるからです。

次に、$a_n=m$となる$a_1,a_2,a_3,\cdots$を順に割り当てていくと、以下のようになります。

m	個数 2m	累計個数	a_n
1	2	2	a_1,a_2
2	4	6	$a_3,\cdots,a_6$
3	6	12	$a_7,\cdots,a_{12}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
k	2k	k^2+k	$a_{k^2-k+1},\cdots,a_{k^2+k}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

上記の考察を基にして、各設問にアプローチします。

(1)各要素を列挙すると、以下のようになります。

m	個数 2m	$\frac{1}{a_k}$の部分和
1	2	$\frac{1}{1} \times 2 = 2$
2	4	$\frac{1}{2} \times 4 = 2$
3	6	$\frac{1}{3} \times 6 = 2$
…	…	…
k	2k	$\frac{1}{k} \times 2k = 2$
総和	$\sum_{k=1}^{k} 2i = k^2 + k$	$\sum_{k=1}^{k} 2 = 2k$

よって、

$$\sum_{k=1}^{n^2+n} \frac{1}{a_k} = 2n$$

です。

(2)$n = 44$のとき、$n^2 + n = 1980$なので、

$$\sum_{k=1}^{2023} \frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^{1980} \frac{1}{a_k} + \sum_{k=1981}^{2023} \frac{1}{a_k}$$

の2つの部分和に分けられます。すると、

$$\sum_{k=1}^{1980} \frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^{44^2+44} \frac{1}{a_k} = 2 \cdot 44 = 88$$

また、$45^2 + 45 = 2070$なので、$1981 \leq k \leq 2070$の区間では、$a_k = 45$なので、

$$\sum_{k=1981}^{2023} \frac{1}{a_k} = (2023 - 1981 + 1) \cdot \frac{1}{45} = \frac{43}{45}$$

です。以上より

$$\sum_{k=1}^{2023} \frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^{1980} \frac{1}{a_k} + \sum_{k=1981}^{2023} \frac{1}{a_k} = 88 + \frac{43}{45} = \frac{4003}{45}$$

となります。

(3)(1)と同じようにして、各要素を列挙すると、以下のようになります。

m	個数 $2m$	$\frac{k}{a_k}$ の部分和
1	2	$\frac{1+2}{1}=3$
2	4	$\frac{3+\cdots+6}{2}=9$
3	6	$\frac{7+\cdots+12}{3}=19$
…	…	…
k	2k	$\frac{(k^2-k+1)+\cdots+(k^2+k)}{k}=2k^2+1$
総和	$\sum_{k=1}^{k} 2i = k^2+k$	$\sum_{k=1}^{k}(2i^2+1)=\frac{k(2k^2+3k+4)}{3}$

よって、

$$\sum_{k=1}^{n^2+n}\frac{k}{a_k}=\frac{n(2n^2+3n+4)}{3}$$

です。

(4)各要素を列挙すると、以下のようになります。

m	個数 2m	$\left[\frac{k}{a_k}\right]$の部分和
1	2	$\left[\frac{1}{1}\right]+\left[\frac{2}{1}\right]=3$
2	4	$\left[\frac{3}{2}\right]+\left[\frac{4}{2}\right]+\left[\frac{5}{2}\right]+\left[\frac{6}{2}\right]=8$
3	6	$\left[\frac{7}{3}\right]+\left[\frac{8}{3}\right]+\left[\frac{9}{3}\right]+\left[\frac{10}{3}\right]+\left[\frac{11}{3}\right]+\left[\frac{12}{3}\right]=17$
…	…	…
k	2k	$\left[\frac{k^2-k+1}{k}\right]+\cdots+\left[\frac{k^2+k}{k}\right]$ $=\left[\frac{k^2-k+1}{k}\right]+\cdots+\left[\frac{k^2-1}{k}\right]$ $+\left[\frac{k^2}{k}\right]+\cdots+\left[\frac{k^2+k-1}{k}\right]$ $+\left[\frac{k^2+k}{k}\right]=(k-1)(k-1)+kk+k+1=2k^2-k+2$
総和	$\sum_{k=1}^{k}2i=k^2+k$	$\sum_{k=1}^{k}(2i^2-i+2)=\frac{k(4k^2+3k+11)}{6}$

よって、

$$\sum_{k=1}^{n^2+n}\left[\frac{k}{a_k}\right]=\frac{n(4n^2+3n+11)}{6}$$

です。

(5)各要素を列挙すると、以下のようになります。

n	$\dfrac{1}{[\sqrt{\mathrm{n}}]}$	$\dfrac{1}{[\sqrt{\mathrm{n}}]}$の部分和
1～3	$\dfrac{1}{1}$	$\dfrac{1}{1}\times(3-1+1)=3$
4～8	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{2}\times(8-4+1)=\dfrac{5}{2}$
9～15	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{3}\times(15-9+1)=\dfrac{7}{3}$
16～24	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{4}\times(24-16+1)=\dfrac{9}{4}$
25～35	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{1}{5}\times(35-25+1)=\dfrac{11}{5}$
	総和	$3+\dfrac{5}{2}+\dfrac{7}{3}+\dfrac{9}{4}+\dfrac{11}{5}=\dfrac{737}{60}$

よって、

$$\sum_{\mathrm{n}=1}^{35}\frac{1}{[\sqrt{\mathrm{n}}]}=\frac{737}{60}$$

です。

(6)各要素を列挙すると、以下のようになります。

k	n	$\frac{1}{[\sqrt{n}]}$	$\left[\frac{n}{[\sqrt{n}]}\right]$の部分和
1	$1\sim3$	1	$\left[\frac{1}{1}\right]+\left[\frac{2}{1}\right]+\left[\frac{3}{1}\right]=6$
2	$4\sim8$	$\frac{1}{2}$	$\left[\frac{4}{2}\right]+\left[\frac{5}{2}\right]+\left[\frac{6}{2}\right]+\left[\frac{7}{2}\right]+\left[\frac{8}{2}\right]=14$
3	$9\sim15$	$\frac{1}{3}$	$\left[\frac{9}{3}\right]+\left[\frac{10}{3}\right]+\left[\frac{11}{3}\right]+\left[\frac{12}{3}\right]+\left[\frac{13}{3}\right]+\left[\frac{14}{3}\right]+\left[\frac{15}{3}\right]=26$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
k	$k^2\sim k^2+2k$	$\frac{1}{k}$	$\left[\frac{k^2}{k}\right]+\cdots+\left[\frac{k^2+2k}{k}\right]$

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{k^2}{k}\right]+\cdots+\left[\frac{k^2+2k}{k}\right]\\
&=\left[\frac{k^2}{k}\right]+\cdots+\left[\frac{k^2+k-1}{k}\right]\\
&+\left[\frac{k^2+k}{k}\right]+\cdots+\left[\frac{k^2+2k-1}{k}\right]\\
&+\left[\frac{k^2+2k}{k}\right]\\
&=k^2+k(k+1)+k+2=2k^2+2k+2
\end{aligned}
$$

総和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{k}(2i^2+2i+2)=\frac{2k(k^2+3k+5)}{3}$

よって、

$$\sum_{k=1}^{n^2+2n}\left[\frac{k}{[\sqrt{k}]}\right]=\frac{2n(n^2+3n+5)}{3}$$

となりますが、$n^2+2n=2024\Rightarrow n=44$なので、

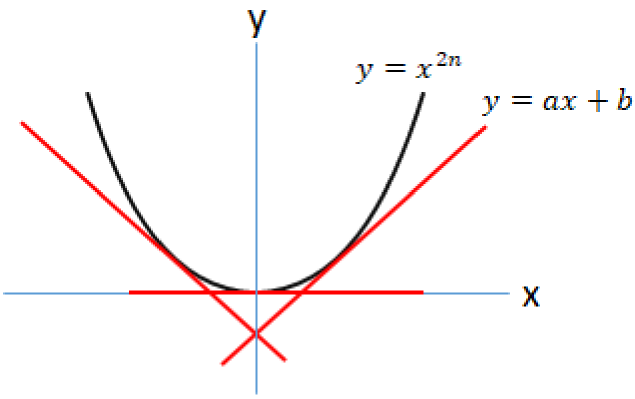
$$\sum_{n=1}^{2024}\left[\frac{n}{[\sqrt{n}]}\right]=\sum_{n=1}^{44^2+2\cdot44}\left[\frac{n}{[\sqrt{n}]}\right]=\frac{2\cdot44(44^2+3\cdot44+5)}{3}=60808$$

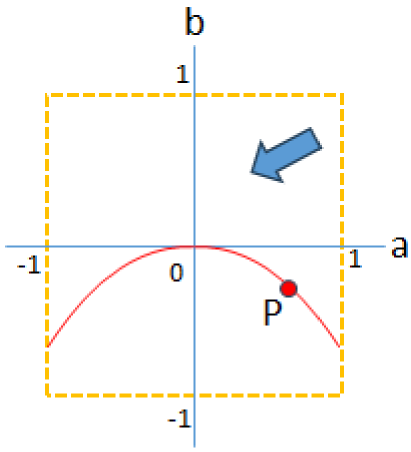
です。

追加問題1　方針が立たなかったので、a, bは区間$[-1,1]$で一様分布しているだろうと考えて、確率の問題を次の面積比の問題に読み替えました。

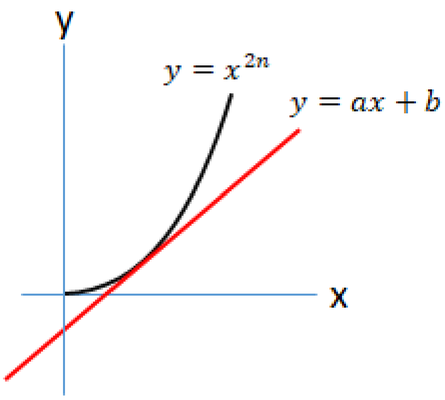
$y=x^{2n}$に$y=ax+b$が接しながら動くとき、軌跡$P(a,b)$は与えられた領域をどんな比率に切断するのか？

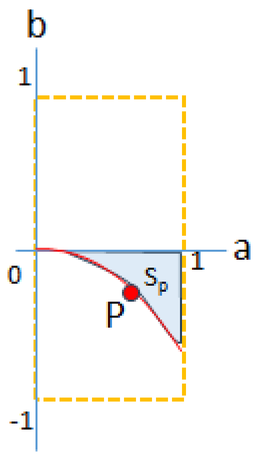
この解釈でいくと、軌跡Pはオレンジ点線の領域を2つに切断します。このとき、矢印を付けた方の領域の面積比を求めれば良いのです。少々強引ですが、とりあえず答えは出せます。





$y=ax+b$はy軸に関して対称ですし、比率を求めれば良いので、$x\geq 0$で考えます。





$b>0$の場合は、aの値に関わりなく交点を2つ持ちますから、切断線は、$b\leq 0$に存在します。

$y=x^{2n}$と$y=ax+b$の接点を(t,t^{2n})とすると、傾きaは、

$$a=2nt^{2n-1}$$

です。一方、接線は、

$$y-t^{2n}=2nt^{2n-1}(x-t)$$

なので、$x=0$とやって、y切片bを求めると、

$$b=(1-2n)t^{2n}$$

です。tは媒介変数ですが、bをaの関数$b(a)$と捉えれば、青色の面積Spは、

$$Sp=-\int_0^1 b(a)\,da$$

です。ここで、

$$da=2n(2n-1)t^{2n-2}dt$$

そして、

a	0	→	1
t	0	→	$\frac{1}{\sqrt[2n-1]{2n}}$

なので、

$$Sp=-\int_0^1 b(a)\,da=-\int_0^{\frac{1}{\sqrt[2n-1]{2n}}}(1-2n)t^{2n}\cdot 2n(2n-1)t^{2n-2}dt=\frac{(2n-1)^2}{(4n-1)(2n)^{\frac{2n}{2n-1}}}$$

となりますから、面積比は、

$$面積比=\frac{1+Sp}{2}=\frac{1+\frac{(2n-1)^2}{(4n-1)(2n)^{\frac{2n}{2n-1}}}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{(2n-1)^2}{4n(4n-1)\sqrt[2n-1]{2n}}$$

となります。

(1)上述した通り、

$$P(n)=\frac{1}{2}+\frac{(2n-1)^2}{4n(4n-1)\sqrt[2n-1]{2n}}$$

です。

(2)

$$\lim_{n\to\infty}P(n)=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}+\frac{(2n-1)^2}{4n(4n-1)\sqrt[2n-1]{2n}}\right\}=\frac{1}{2}+\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\left(2-\frac{1}{n}\right)^2}{4\left(4-\frac{1}{n}\right)\sqrt[2n-1]{2n}}\right\}=\frac{1}{2}+\frac{2^2}{4\cdot 4\cdot 1}=\frac{3}{4}$$