● 問題 433 解答＜三角定規＞

整数 n を

- 第 1 群　1，2，　　　(2個)
- 第 2 群　3，4，5，6　(4個)

　$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

- 第 m 群　$m^2-m+1,\ m^2-m+2,\ \cdots,\ m^2+m$　($2m$個)

　$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

とグループ分けする。

第 m 群に属する $2m$ 個の整数 n（$m^2-m<n\leqq m^2+m$）に対し，

$$m^2\left(1-\frac{1}{m}\right)<n\leqq m^2\left(1+\frac{1}{m}\right)$$

$$m\sqrt{1-\frac{1}{m}}<\sqrt{n}\leqq m\sqrt{1+\frac{1}{m}}$$

だから，$\sqrt{n}$ に最も近い整数 a_n は，$a_n=m$。

以上をもとにして，

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n2+n}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\cdot 2k=\mathbf{2n}$　…[答]

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2023}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{1980}\frac{1}{a_k}+\sum_{k=1981}^{2023}\frac{1}{a_k}=2\cdot 44+\frac{1}{45}(2023-1980)=\mathbf{\frac{4003}{45}}$　…[答]

(3) 第 m 群に属する $2m$ 個の整数の和は

$$\sum_{k=m2-m+1}^{m2+m}k=\frac{1}{2}(m^2+m)(m^2+m+1)-\frac{1}{2}(m^2-m)(m^2-m+1)=m(2m^2+1)$$

だから

$$\sum_{k=1}^{n2+n}\frac{k}{a_k}=\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\cdot m(2m^2+1)=\sum_{m=1}^{n}(2m^2+1)=\mathbf{\frac{1}{3}n(n^2+3n+4)}\quad\cdots[答]$$

(4) 第 m 群 $a_k=m$ 対し，

- 小さい方から $m-1$ 個 $(m^2-m+1,\ m^2-m+2,\ \cdots,\ m^2-1)$ が $\left[\dfrac{k}{a_k}\right]=m-1$
- 続く m 個 $(m^2,\ m^2+1,\ \cdots,\ m^2+m-1)$ が $\left[\dfrac{k}{a_k}\right]=m$
- 最後の 1 個 $k=m^2+m$ が $\left[\dfrac{k}{a_k}\right]=m+1$

だから

$$\sum_{k=1}^{n2+n}\left[\frac{k}{a_k}\right]=\sum_{m=1}^{n}\{(m-1)^2+m^2+m+1\}=\mathbf{\frac{1}{6}n(4n^2+3n+11)}\quad\cdots[答]$$

(5) $m^2 \leqq n < (m+1)^2$ の $2m+1$ 個の n に対し

$$m \leqq \sqrt{n} < m+1 \quad \therefore \ [\sqrt{n}\,] = m$$

だから

$$\sum_{n=1}^{35} \frac{1}{[\sqrt{n}\,]} = \sum_{m=1}^{5} \frac{2m+1}{m} = \sum_{m=1}^{5}\left(2+\frac{1}{m}\right) = 2\cdot 5 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \mathbf{\frac{737}{60}} \quad \cdots[答]$$

(6) ・ $m^2 \leqq n < m^2+m$ のとき, $\dfrac{n}{[\sqrt{n}\,]} = m + \dfrac{k}{m}$, $\left[\dfrac{n}{[\sqrt{n}\,]}\right] = m$ $(k=0,1,\cdots,m-1)$

・ $m^2+m+1 \leqq n < m^2+2m$ のとき, $\dfrac{n}{[\sqrt{n}\,]} = m+1+\dfrac{k}{m}$, $\left[\dfrac{n}{[\sqrt{n}\,]}\right] = m+1$ $(k=0,1,\cdots m-1)$

・ $n = m^2+2m$ のとき, $\dfrac{n}{[\sqrt{n}\,]} = m+2$, $\left[\dfrac{n}{[\sqrt{n}\,]}\right] = m+2$

だから, これら $2m+1$ 個の総和は, $m\cdot m + (m+1)m + m + 2 = 2(m^2+m+1)$

よって

$$\sum_{n=1}^{2024}\left[\frac{n}{[\sqrt{n}\,]}\right] = \left|\sum_{m=1}^{l} 2(m^2+m+1)\right|_{l=44} = \left|\frac{2}{3}l(l^2+3l+5)\right|_{l=44} = \frac{2}{3}\cdot 44\cdot(44^2+3\cdot 44+5) = \mathbf{60808} \quad \cdots[答]$$