第 434 回　2024 の問題

問題 1 <過去の入試問題の類題>

2024の正の約数 n 個を小さい順に並べた数列を $\{a_k\}$ とする。

$S(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k{}^x$ とおく。次の問の値を求めよ。

(1)　$S(0)$　　(2)　$S(1)$　　(3)　$S(-1)$　　(4)　$\dfrac{S(2)}{S(1)}$　　(5)　$\lim_{m\to\infty}\dfrac{S(m+1)}{S(m)}$　　(6)　$\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{a_k+\sqrt{2024}}$

解答

(1)　$2024=2^3\cdot 11\cdot 23$ より，正の約数の個数は，$(3+1)(1+1)(1+1)=16$　$\therefore n=16$

よって，$S(0)=\sum_{k=1}^{16}1=16$　答

(2)　$S(1)=\sum_{k=1}^{16}a_k=(1+2+2^2+2^3)(1+11)(1+23)=15\cdot 12\cdot 24=4320$　答

(3)　$a_k a_{17-k}=2024$ より，

$$S(-1)=\sum_{k=1}^{16}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{16}\frac{a_{17-k}}{2024}=\frac{S(1)}{2024}=\frac{4320}{2024}=\frac{540}{253}$$　答

(4)　(2) と，$S(2)=\sum_{k=1}^{16}a_k{}^2=(1^2+2^2+4^2+8^2)(1^2+11^2)(1^2+23^2)=85\cdot 122\cdot 530$ より，

$$\frac{S(2)}{S(1)}=\frac{85\cdot 122\cdot 530}{4320}=\frac{274805}{216}$$　答

(5)　$a_1<a_2<\cdots<a_n=2024$ である。

$0<\dfrac{a_k}{2024}<1$　（$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$）より，$m\to\infty$ のとき，$\left(\dfrac{a_k}{2024}\right)^m\to 0$ であるから，

分母，分子の各項を 2024^m で割ると，

$$\lim_{m\to\infty}\frac{S(m+1)}{S(m)}=\lim_{m\to\infty}\frac{a_1{}^{m+1}+a_2{}^{m+1}+\cdots+a_n{}^{m+1}}{a_1{}^m+a_2{}^m+\cdots+a_n{}^m}=\lim_{m\to\infty}\frac{a_1\left(\frac{a_1}{2024}\right)^m+a_2\left(\frac{a_2}{2024}\right)^m+\cdots+2024\cdot 1^m}{\left(\frac{a_1}{2024}\right)^m+\left(\frac{a_2}{2024}\right)^m+\cdots+1^m}=2024$$　答

(6)　$a_k a_{17-k}=2024$ より，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k+\sqrt{2024}}=\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{1}{a_k+\sqrt{2024}}+\frac{1}{\frac{2024}{a_k}+\sqrt{2024}}\right)=\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{1}{a_k+\sqrt{2024}}+\frac{a_k}{\sqrt{2024}(\sqrt{2024}+a_k)}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{\sqrt{2024}}=\frac{8}{\sqrt{2024}}=\frac{2\sqrt{506}}{253}$$　答

問題2＜2001年千葉大学の入試問題の類題＞

36! を一の位から見て最初に現れる0でない数字を求めよ。

$\boxed{解答}$ $36\div5=7\cdots1$，$7\div5=1\cdots2$ より，36! には，因数5が，$7+1=8$（個）ある。因数2はこれよりも多い。

$10=2\cdot5$ であるから，$36!\div10^8$ の一の位が求める数である。

$a=\dfrac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}{10^2}$，

$b=\dfrac{11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot15\cdot16\cdot17\cdot18\cdot19\cdot20}{10^2}$，

$c=\dfrac{21\cdot22\cdot23\cdot24\cdot25\cdot26\cdot27\cdot28\cdot29\cdot30}{10^3}$，

$d=\dfrac{31\cdot32\cdot33\cdot34\cdot35\cdot36}{10}$ とおくと，$abcd=\dfrac{36!}{10^8}$ である。

ここで，一の位が1, 2, 3, 6, 7, 8, 9である数の積の一の位は，4であるから，

$a=1\cdot2\cdot3\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\times\dfrac{4\cdot5\cdot10}{10^2}=1\cdot2\cdot3\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\times2$　この一の位は，$4\times2=8$　…①

$b=11\cdot12\cdot13\cdot16\cdot17\cdot18\cdot19\times\dfrac{14\cdot15\cdot20}{10^2}=11\cdot12\cdot13\cdot16\cdot17\cdot18\cdot19\times7\cdot3\cdot2$　この一の位は，$4\times2=8$　…②

$c=21\cdot22\cdot23\cdot26\cdot27\cdot28\cdot29\times\dfrac{24\cdot25\cdot30}{10^3}=21\cdot22\cdot23\cdot26\cdot27\cdot28\cdot29\times6\cdot3$　この一の位は，$4\cdot8\to2$　…③

$d=31\cdot32\cdot33\cdot34\cdot7\cdot18$　この一の位は，4　…④

①，②，③，④より $abcd$ の一の位は，$8\cdot8\cdot2\cdot4\to2$ より，2

よって，36!を一の位から見て最初に現れる0でない数字は，2　$\boxed{答}$

$\boxed{補足}$1　$36!=371993326789901217467999448150835200000000$

$\boxed{補足}$2　同様に計算すると，100!を一の位から見て最初に現れる0でない数字は4となった。

$a_k=\dfrac{(10k)!}{\{10(k-1)\}!}$ とおくと，$a_1a_2\cdots a_{10}=100!$ である。

$a_1=1\cdot2\cdot3\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\times\dfrac{4\cdot5\cdot10}{10^2}=1\cdot2\cdot3\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\times2$　この一の位は，$4\times2=8$　…①

$a_2=11\cdot12\cdot13\cdot16\cdot17\cdot18\cdot19\times\dfrac{14\cdot15\cdot20}{10^2}=11\cdot12\cdot13\cdot16\cdot17\cdot18\cdot19\times7\cdot3\cdot2$　この一の位は，$4\times2=8$　…②

$a_3=21\cdot22\cdot23\cdot26\cdot27\cdot28\cdot29\times\dfrac{24\cdot25\cdot30}{10^3}=21\cdot22\cdot23\cdot26\cdot27\cdot28\cdot29\times6\cdot3$　この一の位は，$4\cdot8\to2$　…③

$a_4=31\cdot32\cdot33\cdot26\cdot37\cdot38\cdot39\times\dfrac{34\cdot35\cdot40}{10^2}=31\cdot32\cdot33\cdot36\cdot37\cdot38\cdot39\times17\cdot7\cdot4$　この一の位は，$4\cdot6\to4$　…④

$a_5=41\cdot42\cdot43\cdot46\cdot47\cdot48\cdot49\times\dfrac{44\cdot45\cdot50}{10^3}=41\cdot42\cdot43\cdot46\cdot47\cdot48\cdot49\times11\cdot9$　この一の位は，$4\cdot9\to6$　…⑤

$a_6=51\cdot52\cdot53\cdot56\cdot57\cdot58\cdot59\times\dfrac{54\cdot55\cdot60}{10^2}=51\cdot52\cdot53\cdot56\cdot57\cdot58\cdot59\times54\cdot11\cdot3$

この一の位は，$4\cdot2\to8$　…⑥

$a_7=61\cdot62\cdot63\cdot66\cdot67\cdot68\cdot69\times\dfrac{64\cdot65\cdot70}{10^2}=61\cdot62\cdot63\cdot66\cdot67\cdot68\cdot69\times32\cdot13\cdot7$

この一の位は，$4\cdot2\to8$　…⑦

$a_8 = 71\cdot72\cdot73\cdot76\cdot77\cdot78\cdot79\times\dfrac{74\cdot75\cdot80}{10^3} = 71\cdot72\cdot73\cdot76\cdot77\cdot78\cdot79\times74\cdot3\cdot2$

この一の位は，$4\cdot4\to6$　…⑧

$a_9 = 81\cdot82\cdot83\cdot86\cdot87\cdot88\cdot89\times\dfrac{84\cdot85\cdot90}{10^2} = 81\cdot82\cdot83\cdot86\cdot87\cdot88\cdot89\times37\cdot17\cdot9$

この一の位は，$4\cdot1\to4$　…⑨

$a_{10} = 91\cdot92\cdot93\cdot96\cdot97\cdot98\cdot99\times\dfrac{94\cdot95\cdot100}{10^3} = 91\cdot92\cdot93\cdot96\cdot97\cdot98\cdot99\times47\cdot19$

この一の位は，$4\cdot3\to2$　…⑩

①，②，…，⑩より，$a_1a_2\cdots a_{10} = \dfrac{100!}{10^{24}} \to 8\cdot8\cdot2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot8\cdot4\cdot6\cdot2 \to 4$　答

問題3

a，b，c は自然数で，次の等式を満たす組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。

(1)　$a(2b^2+c^2)=2024$

(2)　$a(a^2+b^2+c^2)=2024$

解答

(1)　a は2024の正の約数で，$2b^2+c^2\geqq3$ より，　$a=2024,\ 1012$ は不適である。

$a=\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 11,\ 22,\ 23,\ 44,\ 46,\ 88,\ 92,\ 184,\ 253,\ 506\}$ のとき，

$2b^2+c^2=\dfrac{2024}{a}=\{2024,\ 1012,\ 506,\ 253,\ 184,\ 92,\ 88,\ 46,\ 44,\ 23,\ 22,\ 11,\ 8,\ 4\}$

この14通りの中で b，c が自然数になる組合せは，次の4通りである。

$(a,\ b,\ c)=(23,\ 6,\ 4)$，$(46,\ 2,\ 6)$，$(92,\ 3,\ 2)$，$(184,\ 1,\ 3)$　答

(2)　a は2024の正の約数で，$2024=a(a^2+b^2+c^2)\geqq a^3$ である。$12^3=1728$，$13^3=2197$ より，

$a=\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 11\}$ のとき，$b^2+c^2=\dfrac{2024}{a}-a^2=\{2023,\ 2020,\ 2008,\ 1960,\ 1903\}$

b，c は入れ換えが可能であるから，この 5×2 通りの中で b，c が自然数になる組合せは，次の2通りである。

$(a,\ b,\ c)=(4,\ 7,\ 21)$，$(4,\ 21,\ 7)$　答

追加問題1

k を整数，l を自然数とする。

$k^3+(k+1)^3+(k+2)^3+\cdots+(k+l-1)^3=2024$ となる k，l の値を求めよ。

解答　$1^3+2^3+\cdots+n^3=\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ である。

$k^3+(k+1)^3+(k+2)^3+\cdots+(k+l-1)^3$ について，$k=m+1$，$k+l-1=n$　…①とおくと，

$$\begin{aligned}k^3+(k+1)^3+(k+2)^3+\cdots+(k+l-1)^3 &= (m+1)^3+(m+2)^3+\cdots+n^3\\ &= (1^3+2^3+\cdots+n^3)-(1^3+2^3+\cdots+m^3)\\ &= \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2-\left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2\end{aligned}$$

$\dfrac{n(n+1)}{2}=a$，$\dfrac{m(m+1)}{2}=b$ とおくと，a，b は整数で，$a^2-b^2=2024$ であるから，

$(a+b)(a-b)=2^3\cdot11\cdot23$ より，2024 を 2 数の積の形に表すと，

$(a+b)(a-b)=2024\cdot1$，$1012\cdot2$，$506\cdot4$，$253\cdot8$，$184\cdot11$，$92\cdot22$，$88\cdot23$，$46\cdot44$ の 8 通り考えられる。

ところが，$(a+b)+(a-b)=2a$ （偶数）であるから，偶奇が同じ 2 数の積にしなくてはならない。

$\therefore (a+b)(a-b)=1012\cdot2$，$506\cdot4$，$92\cdot22$，$46\cdot44$ の 4 通りに絞られる。

その組合せは，$(a+b,\ a-b)=(1012,\ 2)$，$(506,\ 4)$，$(92,\ 22)$，$(46,\ 44)$ より，

$(a,\ b)=\left(\dfrac{n(n+1)}{2},\ \dfrac{m(m+1)}{2}\right)=(507,\ 505)$，$(255,\ 251)$，$(57,\ 35)$，$(45,\ 1)$

各数を 2 倍すると，$(n(n+1),\ m(m+1))=(1014,\ 1010)$，$(510,\ 502)$，$(114,\ 70)$，$(90,\ 2)$

$n(n+1)$，$m(m+1)$ は連続する 2 つの整数の積である。そのように分解できるのは，

$(n(n+1),\ m(m+1))=(90,\ 2)=(9\cdot10,\ 1\cdot2)$，$(9\cdot10,\ (-2)\cdot(-1))$ だけである。

よって，$(n,\ m)=(9,\ 1)$，$(9,\ -2)$

①より，$(k,\ l)=(2,\ 9)$，$(-1,\ 11)$　答

補足　実際，$2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3+9^3=2024$，

$(-1)^3+0^3+1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3+9^3=2024$

追加問題 2

2024 を正の 2 つの有理数に，次のように分ける。

どちらも整数でなく，一方は有理数の平方数，他方は 1 を加えると有理数の平方数になる。

2 数の分け方の一例を求めよ。

解答

2024 を 2 つの有理数に分け，一方を x^2 とおくと，他方は，$2025-x^2$ と表される。

$2025-x^2=(45-mx)^2$ とおくと，$x=\dfrac{90m}{m^2+1}$

よって，$2024=p+q$ とおくと，$p=\left(\dfrac{90m}{m^2+1}\right)^2$ のとき，$q=2024-p$ となる。

$m=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$ を代入すると，

$(p,\ q)=(1296,\ 728)$，$(729,\ 1295)$，$\left(\dfrac{129600}{289},\ \dfrac{455336}{289}\right)$，$\left(\dfrac{50625}{169},\ \dfrac{291431}{169}\right)$，$\left(\dfrac{291600}{1369},\ \dfrac{2479256}{1369}\right)$，

$\left(\dfrac{3969}{25},\ \dfrac{46631}{25}\right)$

よって，一例を挙げると，$\dfrac{3969}{25}$ と $\dfrac{46631}{25}$　答

追加問題 3

$\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x^2+1}+\dfrac{4}{x^4+1}=8$ のとき，$\left(\dfrac{1}{x^4-x^2+1}+\dfrac{1}{x^4+x^2+1}\right)^{2024}$ の値を求めよ。

解答　条件式を変形すると，$\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{2}{x^2+1}+\dfrac{4}{x^4+1}=8$，$\dfrac{4}{x^4-1}+\dfrac{4}{x^4+1}=8$

分母を払うと，$4(x^4+1)+4(x^4-1)=8(x^8-1)$　$\therefore x^8=x^4+1$　…①

このとき，

$$\frac{1}{x^4-x^2+1}+\frac{1}{x^4+x^2+1}=\frac{x^4+x^2+1+x^4-x^2+1}{(x^4-x^2+1)(x^4+x^2+1)}=\frac{2(x^4+1)}{x^8+x^4+1}=\frac{2x^8}{x^8+x^8}\ (\because ①)\ =1$$

よって，$\left(\frac{1}{x^4-x^2+1}+\frac{1}{x^4+x^2+1}\right)^{2024}=1^{2024}=1$　答

追加問題 4

2023 本のうち，当たりが n 本入っているくじがある。次の各々の場合について，n の最小値を求めよ。

(1)　2 本引いて，少なくとも 1 本当たりを引く確率が $\frac{1}{2}$ を超える

(2)　3 本引いて，少なくとも 1 本当たりを引く確率が $\frac{1}{2}$ を超える

(3)　4 本引いて，少なくとも 1 本当たりを引く確率が $\frac{1}{2}$ を超える

解答　k 本引いて，少なくとも 1 本あたりを引く事象の余事象は，すべて外れを引く事象であるから，

$\frac{2023-n}{2023}\cdot\frac{2022-n}{2022}\cdot\cdots\cdot\frac{2024-k-n}{2024-k}\leqq\frac{1}{2}$　…①を考える。$\frac{2023+(2024-k)}{2}=2023-\frac{k-1}{2}$ より，

①を満たす n は，$\left(\frac{2023-\frac{k-1}{2}-n}{2023-\frac{k-1}{2}}\right)^k\leqq\frac{1}{2}$　…②を満たす n にほぼ等しいから，②を考える。

②より，$n\geqq\left(2023-\frac{k-1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt[k]{2}}\right)$

これを満たす最小の n は，$n=\left[\left(2023-\frac{k-1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt[k]{2}}\right)\right]+1$　…③　（[ ] はガウス記号）

よって，①を満たす最小の n の値は，③を満たす n の値かその ±1 である。

①の左辺を $f(n)$ とおく。

(1)　$k=2$ のとき，③より，$n=\left[2022.5\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]+1=593$

$f(592)=0.500263$，$f(593)=0.499564$，$f(594)=0.498261$ より，$n=593$（本）　答

(2)　$k=3$ のとき，③より，$n=\left[2022\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)\right]+1=418$

$f(417)=0.500128$，$f(418)=0.499194$，$f(419)=0.498261$ より，$n=418$（本）　答

(3)　$k=4$ のとき，③より，$n=\left[2021.5\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)\right]+1=322$

$f(321)=0.500739$，$f(322)=0.499562$，$f(323)=0.498387$ より，$n=322$（本）　答

（2023/12/10　ジョーカー）