問題1

⑴$S(0)$は約数の個数ですが、$2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$なので、

$$S(0) = (3+1)(1+1)(1+1) = 16$$

です。

⑵$S(1)$は約数の和ですが、直積$\{2^0, 2^1, 2^2, 2^3\} \times \{11^0, 11^1\} \times \{23^0, 23^1\}$に対応させて考えると、

$$S(1) = (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3)(11^0 + 11^1)(23^0 + 23^1) = 15 \cdot 12 \cdot 24 = 4320$$

です。

⑶$S(-1)$は約数の逆数和なので、

$$S(-1) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{506} + \frac{1}{1012} + \frac{1}{2024} = \frac{2024 + 1012 + 506 + \cdots + 4 + 2 + 1}{2024}$$

と捉えれば、分子は約数和$S(1)$なので、

$$S(-1) = \frac{S(1)}{2024} = \frac{4320}{2024} = \frac{540}{253}$$

です。

⑷ $S(2)$ は約数の二乗和ですが、上記⑵と同様にして、直積$\{(2^0)^2, (2^1)^2, (2^2)^2, (2^3)^2\} \times \{(11^0)^2, (11^1)^2\} \times \{(23^0)^2, (23^1)^2\}$に対応させて考えると、

$$\begin{aligned} S(2) &= \{(2^0)^2 + (2^1)^2 + (2^2)^2 + (2^3)^2\}\{(11^0)^2 + (11^1)^2\}\{(23^0)^2 + (23^1)^2\} \\ &= 85 \cdot 122 \cdot 530 = 5496100 \end{aligned}$$

なので、

$$\frac{S(2)}{S(1)} = \frac{5496100}{4320} = \frac{274805}{216}$$

です。

⑸一般項は、

$$\frac{S(m+1)}{S(m)} = \frac{1^{m+1} + 2^{m+1} + \cdots + 1012^{m+1} + 2024^{m+1}}{1^m + 2^m + \cdots + 1012^m + 2024^m}$$

なので、分子分母を$2024^m$で割ると、

$$\begin{aligned} \frac{S(m+1)}{S(m)} &= \frac{1 \cdot \left(\frac{1}{2024}\right)^m + 2 \cdot \left(\frac{2}{2024}\right)^m + \cdots + 1012 \cdot \left(\frac{1012}{2024}\right)^m + 2024 \cdot \left(\frac{2024}{2024}\right)^m}{\left(\frac{1}{2024}\right)^m + \left(\frac{2}{2024}\right)^m + \cdots + \left(\frac{1012}{2024}\right)^m + \left(\frac{2024}{2024}\right)^m} \\ &= \frac{1 \cdot \left(\frac{1}{2024}\right)^m + 2 \cdot \left(\frac{1}{1012}\right)^m + \cdots + 1012 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^m + 2024}{\left(\frac{1}{2024}\right)^m + \left(\frac{1}{1012}\right)^m + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^m + 1} \end{aligned}$$

です。すると、

$$\lim_{m\to\infty}\frac{S(m+1)}{S(m)}=\frac{2024}{1}=2024$$

となります。

(6)各項の足す順序を入れ替えると、

$$\begin{aligned}与式&=\left(\frac{1}{1+\sqrt{2024}}+\frac{1}{2024+\sqrt{2024}}\right)\\&\quad+\left(\frac{1}{2+\sqrt{2024}}+\frac{1}{1012+\sqrt{2024}}\right)\\&\quad+\cdots\\&\quad+\left(\frac{1}{23+\sqrt{2024}}+\frac{1}{88+\sqrt{2024}}\right)\\&\quad+\left(\frac{1}{44+\sqrt{2024}}+\frac{1}{46+\sqrt{2024}}\right)\end{aligned}$$

です。各(　)の値は$\frac{1}{2\sqrt{506}}$なので、

$$上式=\frac{1}{2\sqrt{506}}\times 8=\frac{2\sqrt{506}}{253}$$

です。

問題2 1～36を素因数分解すると、以下のようになります。

| n | 素因数分解 |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 3 |
| 4 | $2^2$ |
| 5 | 5 |
| 6 | $2\cdot 3$ |
| 7 | 7 |
| 8 | $2^3$ |
| 9 | $3^2$ |
| 10 | $2\cdot 5$ |

| n | 素因数分解 |
|---|---|
| 11 | 11 |
| 12 | $2^2 3$ |
| 13 | 13 |
| 14 | $2\cdot 7$ |
| 15 | $3\cdot 5$ |
| 16 | $2^4$ |
| 17 | 17 |
| 18 | $2\cdot 3^2$ |
| 19 | 19 |
| 20 | $2^2\cdot 5$ |

| n | 素因数分解 |
|---|---|
| 21 | $3\cdot 7$ |
| 22 | $2\cdot 11$ |
| 23 | 23 |
| 24 | $2^3\cdot 3$ |
| 25 | $5^2$ |
| 26 | $2\cdot 13$ |
| 27 | $3^3$ |
| 28 | $2^2\cdot 7$ |
| 29 | 29 |
| 30 | $2\cdot 3\cdot 5$ |

| n | 素因数分解 |
|---|---|
| 31 | 31 |
| 32 | $2^5$ |
| 33 | $3\cdot 11$ |
| 34 | $2\cdot 17$ |
| 35 | $5\cdot 7$ |
| 36 | $2^2\cdot 3^2$ |

これらを掛け合わせて、$\mathrm{m}\times 10^{\mathrm{n}}$の形になるのは、2,5を素因数として持つ数なので、色付けした数を掛け合わせると、

$$2\times 4\times 5\times 10\times 14\times 15\times 20\times 25\times 30\times 35$$
$$= 2\times 2^2\times 5\times 2\cdot 5\times 2\cdot 7\times 3\cdot 5\times 2^2\cdot 5\times 5^2\times 2\cdot 3\cdot 5\times 5\cdot 7$$
$$= 3^2\times 7^2\times 2^8\times 2^8 = 3^2\times 7^2\times 10^8$$

ですから、下8桁が0であることがわかります。そして、繰り上がりを無視して、1の位を掛け合わせると、

$$3^2\times 7^2 = 9\times 49 \Rightarrow 9\times 9 = 81 \Rightarrow 1\cdots ①$$

となります。また、色付けしていない数を、同様にして、掛け合わせると、

$$1\times 3\times 6\times 7\times 8\times 9\times$$
$$11\times 12\times 13\times 16\times 17\times 18\times 19\times$$
$$21\times 22\times 23\times 24\times 26\times 27\times 28\times 29\times$$
$$31\times 32\times 33\times 34\times 36$$
$$\Rightarrow 1\times 3\times 6\times 7\times 8\times 9\times$$
$$1\times 2\times 3\times 6\times 7\times 8\times 9\times$$
$$1\times 2\times 3\times 4\times 6\times 7\times 8\times 9\times$$
$$1\times 2\times 3\times 4\times 6$$
$$\Rightarrow 2\cdots ②$$

①②より、$1\times 2 = 2$なので、最初に現れる0でない数字は2となります。

問題3 よいやり方が浮かびませんでした。aは2024の約数なので、$1, 2, 4, \cdots, 2024$のどれかです。
それぞれのケースを地道に調べ上げました。

(1)次ページの通り、$a, b, c$の等式を満たす組は、

$$(a, b, c) = (23,6,4), (46,2,6), (92,3,2), (184,1,3)$$

となります。

(2)次ページの通り、$a, b, c$の等式を満たす組は、

$$(a, b, c) = (4,7,21), (4,21,7)$$

となります。

(1)$a(2b^2+c^2)=2024$

| a | b | $\frac{2024}{a}-2b^2$ | 平方数判定 | c |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2022 | × | |
| | 2 | 2016 | × | |
| | 3 | 2006 | × | |
| | 4 | 1992 | × | |
| | 5 | 1974 | × | |
| | 6 | 1952 | × | |
| | 7 | 1926 | × | |
| | 8 | 1896 | × | |
| | 9 | 1862 | × | |
| | 10 | 1824 | × | |
| | 11 | 1782 | × | |
| | 12 | 1736 | × | |
| | 13 | 1686 | × | |
| | 14 | 1632 | × | |
| | 15 | 1574 | × | |
| | 16 | 1512 | × | |
| | 17 | 1446 | × | |
| | 18 | 1376 | × | |
| | 19 | 1302 | × | |
| | 20 | 1224 | × | |
| | 21 | 1142 | × | |
| | 22 | 1056 | × | |
| | 23 | 966 | × | |
| | 24 | 872 | × | |
| | 25 | 774 | × | |
| | 26 | 672 | × | |
| | 27 | 566 | × | |
| | 28 | 456 | × | |
| | 29 | 342 | × | |
| | 30 | 224 | × | |
| | 31 | 102 | × | |
| 2 | 1 | 1010 | × | |
| | 2 | 1004 | × | |
| | 3 | 994 | × | |
| | 4 | 980 | × | |
| | 5 | 962 | × | |
| | 6 | 940 | × | |
| | 7 | 914 | × | |
| | 8 | 884 | × | |
| | 9 | 850 | × | |
| 2 | 10 | 812 | × | |
| | 11 | 770 | × | |
| | 12 | 724 | × | |
| | 13 | 674 | × | |
| | 14 | 620 | × | |
| | 15 | 562 | × | |
| | 16 | 500 | × | |
| | 17 | 434 | × | |
| | 18 | 364 | × | |
| | 19 | 290 | × | |
| | 20 | 212 | × | |
| | 21 | 130 | × | |
| | 22 | 44 | × | |
| 4 | 1 | 504 | × | |
| | 2 | 498 | × | |
| | 3 | 488 | × | |
| | 4 | 474 | × | |
| | 5 | 456 | × | |
| | 6 | 434 | × | |
| | 7 | 408 | × | |
| | 8 | 378 | × | |
| | 9 | 344 | × | |
| | 10 | 306 | × | |
| | 11 | 264 | × | |
| | 12 | 218 | × | |
| | 13 | 168 | × | |
| | 14 | 114 | × | |
| | 15 | 56 | × | |
| 8 | 1 | 251 | × | |
| | 2 | 245 | × | |
| | 3 | 235 | × | |
| | 4 | 221 | × | |
| | 5 | 203 | × | |
| | 6 | 181 | × | |
| | 7 | 155 | × | |
| | 8 | 125 | × | |
| | 9 | 91 | × | |
| | 10 | 53 | × | |
| | 11 | 11 | × | |
| 11 | 1 | 182 | × | |
| 11 | 2 | 176 | × | |
| | 3 | 166 | × | |
| | 4 | 152 | × | |
| | 5 | 134 | × | |
| | 6 | 112 | × | |
| | 7 | 86 | × | |
| | 8 | 56 | × | |
| | 9 | 22 | × | |
| 22 | 1 | 90 | × | |
| | 2 | 84 | × | |
| | 3 | 74 | × | |
| | 4 | 60 | × | |
| | 5 | 42 | × | |
| | 6 | 20 | × | |
| 23 | 1 | 86 | × | |
| | 2 | 80 | × | |
| | 3 | 70 | × | |
| | 4 | 56 | × | |
| | 5 | 38 | × | |
| | 6 | 16 | ○ | 4 |
| 44 | 1 | 44 | × | |
| | 2 | 38 | × | |
| | 3 | 28 | × | |
| | 4 | 14 | × | |
| 46 | 1 | 42 | × | |
| | 2 | 36 | ○ | 6 |
| | 3 | 26 | × | |
| | 4 | 12 | × | |
| 88 | 1 | 21 | × | |
| | 2 | 15 | × | |
| | 3 | 5 | × | |
| 92 | 1 | 20 | × | |
| | 2 | 14 | × | |
| | 3 | 4 | ○ | 2 |
| 184 | 1 | 9 | ○ | 3 |
| | 2 | 3 | × | |
| 253 | 1 | 6 | × | |
| 506 | 1 | 2 | × | |

(2)$a(a^2+b^2+c^2)=2024$

| a | b | $\frac{2024}{a}-(a^2+b^2)$ | 平方数判定 | c |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2022 | × | |
| | 2 | 2019 | × | |
| | 3 | 2014 | × | |
| | 4 | 2007 | × | |
| | 5 | 1998 | × | |
| | 6 | 1987 | × | |
| | 7 | 1974 | × | |
| | 8 | 1959 | × | |
| | 9 | 1942 | × | |
| | 10 | 1923 | × | |
| | 11 | 1902 | × | |
| | 12 | 1879 | × | |
| | 13 | 1854 | × | |
| | 14 | 1827 | × | |
| | 15 | 1798 | × | |
| | 16 | 1767 | × | |
| | 17 | 1734 | × | |
| | 18 | 1699 | × | |
| | 19 | 1662 | × | |
| | 20 | 1623 | × | |
| | 21 | 1582 | × | |
| | 22 | 1539 | × | |
| | 23 | 1494 | × | |
| | 24 | 1447 | × | |
| | 25 | 1398 | × | |
| | 26 | 1347 | × | |
| | 27 | 1294 | × | |
| | 28 | 1239 | × | |
| | 29 | 1182 | × | |
| | 30 | 1123 | × | |
| | 31 | 1062 | × | |
| | 32 | 999 | × | |
| | 33 | 934 | × | |
| | 34 | 867 | × | |
| | 35 | 798 | × | |
| | 36 | 727 | × | |
| | 37 | 654 | × | |
| | 38 | 579 | × | |
| | 39 | 502 | × | |
| | 40 | 423 | × | |
| 1 | 41 | 342 | × | |
| | 42 | 259 | × | |
| | 43 | 174 | × | |
| | 44 | 87 | × | |
| 2 | 1 | 1007 | × | |
| | 2 | 1004 | × | |
| | 3 | 999 | × | |
| | 4 | 992 | × | |
| | 5 | 983 | × | |
| | 6 | 972 | × | |
| | 7 | 959 | × | |
| | 8 | 944 | × | |
| | 9 | 927 | × | |
| | 10 | 908 | × | |
| | 11 | 887 | × | |
| | 12 | 864 | × | |
| | 13 | 839 | × | |
| | 14 | 812 | × | |
| | 15 | 783 | × | |
| | 16 | 752 | × | |
| | 17 | 719 | × | |
| | 18 | 684 | × | |
| | 19 | 647 | × | |
| | 20 | 608 | × | |
| | 21 | 567 | × | |
| | 22 | 524 | × | |
| | 23 | 479 | × | |
| | 24 | 432 | × | |
| | 25 | 383 | × | |
| | 26 | 332 | × | |
| | 27 | 279 | × | |
| | 28 | 224 | × | |
| | 29 | 167 | × | |
| | 30 | 108 | × | |
| | 31 | 47 | × | |
| 4 | 1 | 489 | × | |
| | 2 | 486 | × | |
| | 3 | 481 | × | |
| | 4 | 474 | × | |
| | 5 | 465 | × | |
| 4 | 6 | 454 | × | |
| | 7 | 441 | ○ | 21 |
| | 8 | 426 | × | |
| | 9 | 409 | × | |
| | 10 | 390 | × | |
| | 11 | 369 | × | |
| | 12 | 346 | × | |
| | 13 | 321 | × | |
| | 14 | 294 | × | |
| | 15 | 265 | × | |
| | 16 | 234 | × | |
| | 17 | 201 | × | |
| | 18 | 166 | × | |
| | 19 | 129 | × | |
| | 20 | 90 | × | |
| | 21 | 49 | ○ | 7 |
| | 22 | 6 | × | |
| 8 | 1 | 188 | × | |
| | 2 | 185 | × | |
| | 3 | 180 | × | |
| | 4 | 173 | × | |
| | 5 | 164 | × | |
| | 6 | 153 | × | |
| | 7 | 140 | × | |
| | 8 | 125 | × | |
| | 9 | 108 | × | |
| | 10 | 89 | × | |
| | 11 | 68 | × | |
| | 12 | 45 | × | |
| | 13 | 20 | × | |
| 11 | 1 | 62 | × | |
| | 2 | 59 | × | |
| | 3 | 54 | × | |
| | 4 | 47 | × | |
| | 5 | 38 | × | |
| | 6 | 27 | × | |
| | 7 | 14 | × | |

追加問題1　与式を以下の通り、変形します。

$$与式 = \sum_{i=0}^{l-1}(k+i)^3 = k^3\sum_{i=0}^{l-1}1 + 3k^2\sum_{i=0}^{l-1}i + 3k\sum_{i=0}^{l-1}i^2 + \sum_{i=0}^{l-1}i^3$$

$$= k^3 l + \frac{3k^2(l-1)l}{2} + \frac{k(l-1)l(2l-1)}{2} + \frac{(l-1)^2 l^2}{4}$$

$$= \frac{l(l+2k-1)(l^2+2kl-l+2k^2-2k)}{4} = 2024$$

$$\Rightarrow l(l+2k-1)(l^2+2kl-l+2k^2-2k) = 8096 \cdots ①$$

$l$は8096の約数ですが、そのとき、$l^2+2kl-l+2k^2-2k$は$\frac{8096}{l}$の約数になっていなければなりません。可能性を探ってみると、下表のようになります。

| $l$ | $\dfrac{\frac{8096}{l}}{l^2+2kl-l+2k^2-2k}$ | $l$ | $\dfrac{\frac{8096}{l}}{l^2+2kl-l+2k^2-2k}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $\dfrac{4048}{k^2}$ | 16 | $\dfrac{506}{2k^2+30k+240} = \dfrac{506}{2\left(k+\frac{15}{2}\right)^2+\frac{255}{2}}$ |
| 2 | $\dfrac{4048}{2k^2+2k+2} = \dfrac{4048}{2\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}}$ | 22 | $\dfrac{368}{2k^2+42k+462} = \dfrac{368}{2\left(k+\frac{21}{2}\right)^2+\frac{483}{2}}$ |
| 4 | $\dfrac{2024}{2k^2+6k+12} = \dfrac{2024}{2\left(k+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{2}}$ | 23 | $\dfrac{352}{2k^2+44k+506} = \dfrac{352}{2(k+11)^2+264}$ |
| 8 | $\dfrac{1012}{2k^2+14k+56} = \dfrac{1012}{2\left(k+\frac{7}{2}\right)^2+\frac{63}{2}}$ | 32 | $\dfrac{253}{2k^2+62k+992} = \dfrac{253}{2\left(k+\frac{31}{2}\right)^2+\frac{1023}{2}}$ |
| 11 | $\dfrac{736}{2k^2+20k+110} = \dfrac{736}{2(k+5)^2+60}$ | | 以降、省略 |

$l \geq 32$の場合は整数にならないので、$l$は1,2,4,8,11,16,22,23でないと不都合です。各々について、①式に当てはめると、次表のようになります。

| $\mathbf{l}$ | $\mathbf{l(l+2k-1)(l^2+2kl-l+2k^2-2k)=8096}$ | **整数解k** |
|---|---|---|
| 1 | $4k^3=8096$<br>$\Rightarrow 4(k^3-2024)=0$ | |
| 2 | $2(2k+1)(2k^2+2k+2)=8096$<br>$\Rightarrow 4(2k^3+3k^2+3k-2023)=0$ | |
| 4 | $4(2k+3)(2k^2+6k+12)=8096$<br>$\Rightarrow 8(2k^3+9k^2+21k-994)=0$ | |
| 8 | $8(2k+7)(2k^2+14k+56)=8096$<br>$\Rightarrow 16(k-2)(2k^2+25k+155)=0$ | 2 |
| 11 | $11(2k+10)(2k^2+20k+110)=8096$<br>$\Rightarrow 44(k+1)(k^2+14k+91)=0$ | $-1$ |
| 16 | $16(2k+15)(2k^2+30k+240)=8096$<br>$\Rightarrow 32(2k^3+45k^2+465k+1547)=0$ | |
| 22 | $22(2k+21)(2k^2+42k+462)=8096$<br>$\Rightarrow 44(2k^3+63k^2+903k+4667)=0$ | |
| 23 | $23(2k+22)(2k^2+44k+506)=8096$<br>$\Rightarrow 92(k^3+33k^2+495k+2695)=0$ | |

以上より、

$(k,l)=(2,8),(-1,11)$

です。

追加問題3　与式を以下の通り、変形します。

$$与式 = \frac{2}{x^2-1} - \frac{2}{x^2+1} + \frac{8}{x^4+1} = \frac{4}{x^4-1} + \frac{8}{x^4+1} = \frac{4(3x^4-1)}{x^8-1} = 8$$

ここで、$x^4 = x_4$として、上式を解くと、

$$\frac{4(3x_4-1)}{{x_4}^2-1} = 8 \Rightarrow x_4 = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$$

となります。すると、

$$\frac{1}{x^4-x^2+1} + \frac{1}{x^4+x^2+1} = \frac{2(x^4+1)}{x^8+x^4+1} = \frac{2(x_4+1)}{{x_4}^2+x_4+1} = \frac{2(13 \pm \sqrt{17})}{19}$$

ですから、

$$\left(\frac{1}{x^4-x^2+1} + \frac{1}{x^4+x^2+1}\right)^{2024} = \left(\frac{2(13 \pm \sqrt{17})}{19}\right)^{2024}$$

です。

追加問題4　余事象（すべて外れ）で考えると、k本引いて少なくとも1本当たる確率$P_k$は、

$$P_k = 1 - \left(1 - \frac{n}{2023}\right)^k$$

です。$P_k > \frac{1}{2}$とすると、

$$1 - \left(1 - \frac{n}{2023}\right)^k > \frac{1}{2} \Rightarrow n > 2023\left(1 - \frac{1}{\sqrt[k]{2}}\right)$$

となります。この結果を用いて設問を解きます。

(1)$k = 2$とすると、

$$n > 2023\left(1 - \frac{1}{\sqrt[2]{2}}\right) = 592.5229816596143 \cdots \Rightarrow n \text{ の最小値} = 593$$

です。

(2)$k = 3$とすると、

$$n > 2023\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = 417.3438359341661 \cdots \Rightarrow n \text{ の最小値} = 418$$

です。

(3)$k = 4$とすると、

$$n > 2023\left(1 - \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) = 321.8665519417356 \cdots \Rightarrow n \text{ の最小値} = 322$$

です。