問題1

⑴$\mathrm{S}(0)$は約数の個数ですが、$2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$なので、

$$\mathrm{S}(0) = (3+1)(1+1)(1+1) = 16$$

です。

⑵$\mathrm{S}(1)$は約数の和ですが、直積$\{2^0, 2^1, 2^2, 2^3\} \times \{11^0, 11^1\} \times \{23^0, 23^1\}$に対応させて考えると、

$$\mathrm{S}(1) = (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3)(11^0 + 11^1)(23^0 + 23^1) = 15 \cdot 12 \cdot 24 = 4320$$

です。

⑶$\mathrm{S}(-1)$は約数の逆数和なので、

$$\mathrm{S}(-1) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{506} + \frac{1}{1012} + \frac{1}{2024} = \frac{2024 + 1012 + 506 + \cdots + 4 + 2 + 1}{2024}$$

と捉えれば、分子は約数和$\mathrm{S}(1)$なので、

$$\mathrm{S}(-1) = \frac{\mathrm{S}(1)}{2024} = \frac{4320}{2024} = \frac{540}{253}$$

です。

⑷$\mathrm{S}(2)$は約数の二乗和ですが、上記⑵と同様にして、直積$\{(2^0)^2, (2^1)^2, (2^2)^2, (2^3)^2\} \times \{(11^0)^2, (11^1)^2\} \times \{(23^0)^2, (23^1)^2\}$に対応させて考えると、

$$\begin{aligned}\mathrm{S}(2) &= \{(2^0)^2 + (2^1)^2 + (2^2)^2 + (2^3)^2\}\{(11^0)^2 + (11^1)^2\}\{(23^0)^2 + (23^1)^2\} \\ &= 85 \cdot 122 \cdot 530 = 5496100\end{aligned}$$

なので、

$$\frac{\mathrm{S}(2)}{\mathrm{S}(1)} = \frac{5496100}{4320} = \frac{274805}{216}$$

です。

⑸一般項は、

$$\frac{\mathrm{S}(\mathrm{m}+1)}{\mathrm{S}(\mathrm{m})} = \frac{1^{\mathrm{m}+1} + 2^{\mathrm{m}+1} + \cdots + 1012^{\mathrm{m}+1} + 2024^{\mathrm{m}+1}}{1^{\mathrm{m}} + 2^{\mathrm{m}} + \cdots + 1012^{\mathrm{m}} + 2024^{\mathrm{m}}}$$

なので、分子分母を2024^{m}で割ると、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{S}(\mathrm{m}+1)}{\mathrm{S}(\mathrm{m})} &= \frac{1 \cdot \left(\frac{1}{2024}\right)^{\mathrm{m}} + 2 \cdot \left(\frac{2}{2024}\right)^{\mathrm{m}} + \cdots + 1012 \cdot \left(\frac{1012}{2024}\right)^{\mathrm{m}} + 2024 \cdot \left(\frac{2024}{2024}\right)^{\mathrm{m}}}{\left(\frac{1}{2024}\right)^{\mathrm{m}} + \left(\frac{2}{2024}\right)^{\mathrm{m}} + \cdots + \left(\frac{1012}{2024}\right)^{\mathrm{m}} + \left(\frac{2024}{2024}\right)^{\mathrm{m}}} \\ &= \frac{1 \cdot \left(\frac{1}{2024}\right)^{\mathrm{m}} + 2 \cdot \left(\frac{1}{1012}\right)^{\mathrm{m}} + \cdots + 1012 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{m}} + 2024}{\left(\frac{1}{2024}\right)^{\mathrm{m}} + \left(\frac{1}{1012}\right)^{\mathrm{m}} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{m}} + 1}\end{aligned}$$

です。すると、

$$\lim_{m\to\infty}\frac{S(m+1)}{S(m)}=\frac{2024}{1}=2024$$
となります。

(6)各項の足す順序を入れ替えると、

$$
\begin{aligned}
与式 &= \left(\frac{1}{1+\sqrt{2024}}+\frac{1}{2024+\sqrt{2024}}\right)\\
&\quad+\left(\frac{1}{2+\sqrt{2024}}+\frac{1}{1012+\sqrt{2024}}\right)\\
&\quad+\cdots\\
&\quad+\left(\frac{1}{23+\sqrt{2024}}+\frac{1}{88+\sqrt{2024}}\right)\\
&\quad+\left(\frac{1}{44+\sqrt{2024}}+\frac{1}{46+\sqrt{2024}}\right)
\end{aligned}
$$

です。各(　)の値は$\frac{1}{2\sqrt{506}}$なので、

$$上式=\frac{1}{2\sqrt{506}}\times 8=\frac{2\sqrt{506}}{253}$$

です。

問題2 1～36を素因数分解すると、以下のようになります。

n	素因数分解
1	1
2	2
3	3
4	2^2
5	5
6	$2 \cdot 3$
7	7
8	2^3
9	3^2
10	$2 \cdot 5$

n	素因数分解
11	11
12	$2^2 3$
13	13
14	$2 \cdot 7$
15	$3 \cdot 5$
16	2^4
17	17
18	$2 \cdot 3^2$
19	19
20	$2^2 \cdot 5$

n	素因数分解
21	$3 \cdot 7$
22	$2 \cdot 11$
23	23
24	$2^3 \cdot 3$
25	5^2
26	$2 \cdot 13$
27	3^3
28	$2^2 \cdot 7$
29	29
30	$2 \cdot 3 \cdot 5$

n	素因数分解
31	31
32	2^5
33	$3 \cdot 11$
34	$2 \cdot 17$
35	$5 \cdot 7$
36	$2^2 \cdot 3^2$

これらを掛け合わせて、$\mathrm{m} \times 10^{\mathrm{n}}$の形になるのは、2,5を素因数として持つ数なので、色付けした数を掛け合わせると、

$$2 \times 4 \times 5 \times 10 \times 14 \times 15 \times 20 \times 25 \times 30 \times 35$$
$$= 2 \times 2^2 \times 5 \times 2 \cdot 5 \times 2 \cdot 7 \times 3 \cdot 5 \times 2^2 \cdot 5 \times 5^2 \times 2 \cdot 3 \cdot 5 \times 5 \cdot 7$$
$$= 3^2 \times 7^2 \times 2^8 \times 2^8 = 3^2 \times 7^2 \times 10^8$$

ですから、下8桁が0であることがわかります。そして、繰り上がりを無視して、1の位を掛け合わせると、

$$3^2 \times 7^2 = 9 \times 49 \Rightarrow 9 \times 9 = 81 \Rightarrow 1 \cdots ①$$

となります。また、色付けしていない数を、同様にして、掛け合わせると、

$$1 \times 3 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times$$
$$11 \times 12 \times 13 \times 16 \times 17 \times 18 \times 19 \times$$
$$21 \times 22 \times 23 \times 24 \times 26 \times 27 \times 28 \times 29 \times$$
$$31 \times 32 \times 33 \times 34 \times 36$$
$$\Rightarrow 1 \times 3 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times$$
$$1 \times 2 \times 3 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times$$
$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times$$
$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 6$$
$$\Rightarrow 2 \cdots ②$$

①②より、$1 \times 2 = 2$なので、最初に現れる0でない数字は2となります。

問題3　よいやり方が浮かびませんでした。aは2024の約数なので、$1, 2, 4, \cdots, 2024$のどれかです。それぞれのケースを地道に調べ上げました。

⑴次ページの通り、a, b, cの等式を満たす組は、

$$(a, b, c) = (23,6,4), (46,2,6), (92,3,2), (184,1,3)$$

となります。

⑵次ページの通り、a, b, cの等式を満たす組は、

$$(a, b, c) = (4,7,21), (4,21,7)$$

となります。

(1)$a(2b^2+c^2)=2024$

a	b	$\frac{2024}{a}-2b^2$	平方数判定	c
1	1	2022	×	
	2	2016	×	
	3	2006	×	
	4	1992	×	
	5	1974	×	
	6	1952	×	
	7	1926	×	
	8	1896	×	
	9	1862	×	
	10	1824	×	
	11	1782	×	
	12	1736	×	
	13	1686	×	
	14	1632	×	
	15	1574	×	
	16	1512	×	
	17	1446	×	
	18	1376	×	
	19	1302	×	
	20	1224	×	
	21	1142	×	
	22	1056	×	
	23	966	×	
	24	872	×	
	25	774	×	
	26	672	×	
	27	566	×	
	28	456	×	
	29	342	×	
	30	224	×	
	31	102	×	
2	1	1010	×	
	2	1004	×	
	3	994	×	
	4	980	×	
	5	962	×	
	6	940	×	
	7	914	×	
	8	884	×	
	9	850	×	

a	b	$\frac{2024}{a}-2b^2$	平方数判定	c
2	10	812	×	
	11	770	×	
	12	724	×	
	13	674	×	
	14	620	×	
	15	562	×	
	16	500	×	
	17	434	×	
	18	364	×	
	19	290	×	
	20	212	×	
	21	130	×	
	22	44	×	
4	1	504	×	
	2	498	×	
	3	488	×	
	4	474	×	
	5	456	×	
	6	434	×	
	7	408	×	
	8	378	×	
	9	344	×	
	10	306	×	
	11	264	×	
	12	218	×	
	13	168	×	
	14	114	×	
	15	56	×	
8	1	251	×	
	2	245	×	
	3	235	×	
	4	221	×	
	5	203	×	
	6	181	×	
	7	155	×	
	8	125	×	
	9	91	×	
	10	53	×	
	11	11	×	
11	1	182	×	

a	b	$\frac{2024}{a}-2b^2$	平方数判定	c
11	2	176	×	
	3	166	×	
	4	152	×	
	5	134	×	
	6	112	×	
	7	86	×	
	8	56	×	
	9	22	×	
22	1	90	×	
	2	84	×	
	3	74	×	
	4	60	×	
	5	42	×	
	6	20	×	
23	1	86	×	
	2	80	×	
	3	70	×	
	4	56	×	
	5	38	×	
	6	16	○	4
44	1	44	×	
	2	38	×	
	3	28	×	
	4	14	×	
46	1	42	×	
	2	36	○	6
	3	26	×	
	4	12	×	
88	1	21	×	
	2	15	×	
	3	5	×	
92	1	20	×	
	2	14	×	
	3	4	○	2
184	1	9	○	3
	2	3	×	
253	1	6	×	
506	1	2	×	

⑵$a(a^2+b^2+c^2)=2024$

a	b	$\frac{2024}{a}-(a^2+b^2)$	平方数判定	c
1	1	2022	×	
	2	2019	×	
	3	2014	×	
	4	2007	×	
	5	1998	×	
	6	1987	×	
	7	1974	×	
	8	1959	×	
	9	1942	×	
	10	1923	×	
	11	1902	×	
	12	1879	×	
	13	1854	×	
	14	1827	×	
	15	1798	×	
	16	1767	×	
	17	1734	×	
	18	1699	×	
	19	1662	×	
	20	1623	×	
	21	1582	×	
	22	1539	×	
	23	1494	×	
	24	1447	×	
	25	1398	×	
	26	1347	×	
	27	1294	×	
	28	1239	×	
	29	1182	×	
	30	1123	×	
	31	1062	×	
	32	999	×	
	33	934	×	
	34	867	×	
	35	798	×	
	36	727	×	
	37	654	×	
	38	579	×	
	39	502	×	
	40	423	×	

a	b	$\frac{2024}{a}-(a^2+b^2)$	平方数判定	c
1	41	342	×	
	42	259	×	
	43	174	×	
	44	87	×	
2	1	1007	×	
	2	1004	×	
	3	999	×	
	4	992	×	
	5	983	×	
	6	972	×	
	7	959	×	
	8	944	×	
	9	927	×	
	10	908	×	
	11	887	×	
	12	864	×	
	13	839	×	
	14	812	×	
	15	783	×	
	16	752	×	
	17	719	×	
	18	684	×	
	19	647	×	
	20	608	×	
	21	567	×	
	22	524	×	
	23	479	×	
	24	432	×	
	25	383	×	
	26	332	×	
	27	279	×	
	28	224	×	
	29	167	×	
	30	108	×	
	31	47	×	
4	1	489	×	
	2	486	×	
	3	481	×	
	4	474	×	
	5	465	×	

a	b	$\frac{2024}{a}-(a^2+b^2)$	平方数判定	c
4	6	454	×	
	7	441	○	21
	8	426	×	
	9	409	×	
	10	390	×	
	11	369	×	
	12	346	×	
	13	321	×	
	14	294	×	
	15	265	×	
	16	234	×	
	17	201	×	
	18	166	×	
	19	129	×	
	20	90	×	
	21	49	○	7
	22	6	×	
8	1	188	×	
	2	185	×	
	3	180	×	
	4	173	×	
	5	164	×	
	6	153	×	
	7	140	×	
	8	125	×	
	9	108	×	
	10	89	×	
	11	68	×	
	12	45	×	
	13	20	×	
11	1	62	×	
	2	59	×	
	3	54	×	
	4	47	×	
	5	38	×	
	6	27	×	
	7	14	×	

追加問題1　与式を以下の通り、変形します。

$$与式=\sum_{i=0}^{l-1}(k+i)^3=k^3\sum_{i=0}^{l-1}1+3k^2\sum_{i=0}^{l-1}i+3k\sum_{i=0}^{l-1}i^2+\sum_{i=0}^{l-1}i^3$$

$$=k^3l+\frac{3k^2(l-1)l}{2}+\frac{k(l-1)l(2l-1)}{2}+\frac{(l-1)^2l^2}{4}$$

$$=\frac{l(l+2k-1)(l^2+2kl-l+2k^2-2k)}{4}=2024$$

$$\Rightarrow l(l+2k-1)(l^2+2kl-l+2k^2-2k)=8096\cdots①$$

lは8096の約数ですが、そのとき、$l^2+2kl-l+2k^2-2k$は$\frac{8096}{l}$の約数になっていなければなりません。可能性を探ってみると、下表のようになります。

l	$\dfrac{\frac{8096}{l}}{l^2+2kl-l+2k^2-2k}$
1	$\dfrac{4048}{k^2}$
2	$\dfrac{4048}{2k^2+2k+2}=\dfrac{4048}{2\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}}$
4	$\dfrac{2024}{2k^2+6k+12}=\dfrac{2024}{2\left(k+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{2}}$
8	$\dfrac{1012}{2k^2+14k+56}=\dfrac{1012}{2\left(k+\frac{7}{2}\right)^2+\frac{63}{2}}$
11	$\dfrac{736}{2k^2+20k+110}=\dfrac{736}{2(k+5)^2+60}$

l	$\dfrac{\frac{8096}{l}}{l^2+2kl-l+2k^2-2k}$
16	$\dfrac{506}{2k^2+30k+240}=\dfrac{506}{2\left(k+\frac{15}{2}\right)^2+\frac{255}{2}}$
22	$\dfrac{368}{2k^2+42k+462}=\dfrac{368}{2\left(k+\frac{21}{2}\right)^2+\frac{483}{2}}$
23	$\dfrac{352}{2k^2+44k+506}=\dfrac{352}{2(k+11)^2+264}$
32	$\dfrac{253}{2k^2+62k+992}=\dfrac{253}{2\left(k+\frac{31}{2}\right)^2+\frac{1023}{2}}$
	以降、省略

$l\geq 32$の場合は整数にならないので、lは1,2,4,8,11,16,22,23でないと不都合です。各々について、①式に当てはめると、次表のようになります。

l	$l(l+2k-1)(l^2+2kl-l+2k^2-2k)=8096$	**整数解k**
1	$4k^3=8096$ $\Rightarrow 4(k^3-2024)=0$	
2	$2(2k+1)(2k^2+2k+2)=8096$ $\Rightarrow 4(2k^3+3k^2+3k-2023)=0$	
4	$4(2k+3)(2k^2+6k+12)=8096$ $\Rightarrow 8(2k^3+9k^2+21k-994)=0$	
8	$8(2k+7)(2k^2+14k+56)=8096$ $\Rightarrow 16(k-2)(2k^2+25k+155)=0$	2
11	$11(2k+10)(2k^2+20k+110)=8096$ $\Rightarrow 44(k+1)(k^2+14k+91)=0$	-1
16	$16(2k+15)(2k^2+30k+240)=8096$ $\Rightarrow 32(2k^3+45k^2+465k+1547)=0$	
22	$22(2k+21)(2k^2+42k+462)=8096$ $\Rightarrow 44(2k^3+63k^2+903k+4667)=0$	
23	$23(2k+22)(2k^2+44k+506)=8096$ $\Rightarrow 92(k^3+33k^2+495k+2695)=0$	

以上より、

$(k,l)=(2,8),(-1,11)$

です。

追加問題3　与式を以下の通り、変形します。2023/12/19 青字を訂正

$$与式=\frac{2}{x^2-1}-\frac{2}{x^2+1}+\frac{4}{x^4+1}=\frac{4}{x^4-1}+\frac{4}{x^4+1}=\frac{8x^4}{x^8-1}=8$$

ここで、$x^4=x_4$として、上式を解くと、

$$\frac{8x_4}{{x_4}^2-1}=8\Rightarrow x_4=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

となります。すると、

$$\frac{1}{x^4-x^2+1}+\frac{1}{x^4+x^2+1}=\frac{2(x^4+1)}{x^8+x^4+1}=\frac{2(x_4+1)}{{x_4}^2+x_4+1}=\frac{2\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}+1\right)}{\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^2+\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}+1}=1$$

ですから、

$$\left(\frac{1}{x^4-x^2+1}+\frac{1}{x^4+x^2+1}\right)^{2024}=1^{2024}=1$$

です。

追加問題4　余事象（すべて外れ）で考えると、k本引いて少なくとも1本当たる確率P_kは、

$$P_k=1-\left(1-\frac{n}{2023}\right)^k$$

です。$P_k>\frac{1}{2}$とすると、

$$1-\left(1-\frac{n}{2023}\right)^k>\frac{1}{2}\Rightarrow n>2023\left(1-\frac{1}{\sqrt[k]{2}}\right)$$

となります。この結果を用いて設問を解きます。

(1)$k=2$とすると、

$$n>2023\left(1-\frac{1}{\sqrt[2]{2}}\right)=592.5229816596143\cdots\Rightarrow n\text{ の最小値}=593$$

です。

(2)$k=3$とすると、

$$n>2023\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)=417.3438359341661\cdots\Rightarrow n\text{ の最小値}=418$$

です。

(3)$k=4$とすると、

$$n>2023\left(1-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)=321.8665519417356\cdots\Rightarrow n\text{ の最小値}=322$$

です。