問題 1

$2024=2^3\times 11\times 23$ なので、約数は４×2×2＝16 個あります。（n ＝16）

	1	**2**	**4**	**8**
1	1	2	4	8
11	11	22	44	88

→ ×**23**

23	46	92	184
253	506	1012	2024

よって、$\{a_k\}$ は、$\{1,2,4,8,11,22,23,44,46,88,92,184,253,506,1012,2024\}$

$$S(x)=\sum_{k=1}^{16}{a_k}^x=1^x+2^x+4^x+8^x+\cdots+2024^x$$

（1） $S(0)=\sum_{k=1}^{16}{a_k}^0=1^0+2^0+4^0+8^0+\cdots+2024^0=1+1+1+1+\cdots+1=16$

（2） $S(1)=\sum_{k=1}^{16}{a_k}^1=1^1+2^1+4^1+8^1+\cdots+2024^1$

$=(1+2+4+8)+11(1+2+4+8)+23(1+2+4+8)+11\cdot 23(1+2+4+8)$

$=(1+2+4+8)\times(1+11)\times(1+23)=15\times 12\times 24=4320$

（3） $S(-1)=\sum_{k=1}^{16}{a_k}^{-1}$

$=1^{-1}+2^{-1}+4^{-1}+8^{-1}+11^{-1}+22^{-1}+23^{-1}+44^{-1}+46^{-1}+88^{-1}+92^{-1}+184^{-1}+253^{-1}+506^{-1}+1012^{-1}+2024^{-1}$

$=(1^{-1}+2^{-1}+4^{-1}+8^{-1})+11^{-1}(1^{-1}+2^{-1}+4^{-1}+8^{-1})+23^{-1}(1^{-1}+2^{-1}+4^{-1}+8^{-1})+11^{-1}\cdot 23^{-1}(1^{-1}+2^{-1}+4^{-1}+8^{-1})$

$=(1^{-1}+2^{-1}+4^{-1}+8^{-1})\times(1^{-1}+11^{-1})\times(1^{-1}+23^{-1})=\dfrac{8+4+2+1}{8}\times\dfrac{11+1}{11}\times\dfrac{23+1}{23}$

$=\dfrac{15}{8}\times\dfrac{12}{11}\times\dfrac{24}{23}=\dfrac{540}{253}$

（4） $S(2)=\sum_{k=1}^{16}{a_k}^2=1^2+2^2+4^2+8^2+\cdots+2024^2$

$=(1^2+2^2+4^2+8^2)+11^2(1^2+2^2+4^2+8^2)+23^2(1^2+2^2+4^2+8^2)+11^2\cdot 23^2(1^2+2^2+4^2+8^2)$

$=(1^2+2^2+4^2+8^2)(1^2+11^2)(1^2+23^2)=85\times 122\times 530=5496100$

なので、

$$\frac{S(2)}{S(1)}=\frac{5496100}{4320}=\frac{274805}{216}$$

（5）

$$\frac{S(m+1)}{S(m)}=\frac{\sum_{k=1}^{16}{a_k}^{m+1}}{\sum_{k=1}^{16}{a_k}^{m+1}}=\frac{1^{m+1}+2^{m+1}+4^{m+1}+8^{m+1}+\cdots+2024^{m+1}}{1^m+2^m+4^m+8^m+\cdots+2024^m}$$

$$=\frac{(1^{m+1}+2^{m+1}+4^{m+1}+8^{m+1})(1^{m+1}+11^{m+1})(1^{m+1}+23^{m+1})\div(8^m11^m23^m)}{(1^m+2^m+4^m+8^m)(1^m+11^m)(1^m+23^m)\div(8^m11^m23^m)}$$

$$=\frac{\left(\dfrac{1^{m+1}+2^{m+1}+4^{m+1}+8^{m+1}}{8^m}\right)\left(\dfrac{1^{m+1}+11^{m+1}}{11^m}\right)\left(\dfrac{1^{m+1}+23^{m+1}}{23^m}\right)}{\left(\dfrac{1^m+2^m+4^m+8^m}{8^m}\right)\left(\dfrac{1^m+11^m}{11^m}\right)\left(\dfrac{1^m+23^m}{23^m}\right)}$$

$$=\frac{\left\{1\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^m+2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^m+4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^m+8\right\}\left\{1\cdot\left(\frac{1}{11}\right)^m+11\right\}\left\{1\cdot\left(\frac{1}{23}\right)^m+23\right\}}{\left\{\left(\frac{1}{8}\right)^m+\left(\frac{1}{4}\right)^m+\left(\frac{1}{2}\right)^m+1\right\}\left\{\left(\frac{1}{11}\right)^m+1\right\}\left\{\left(\frac{1}{23}\right)^m+1\right\}}$$

なので、

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\left\{1\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^m+2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^m+4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^m+8\right\}\left\{1\cdot\left(\frac{1}{11}\right)^m+11\right\}\left\{1\cdot\left(\frac{1}{23}\right)^m+23\right\}}{\left\{\left(\frac{1}{8}\right)^m+\left(\frac{1}{4}\right)^m+\left(\frac{1}{2}\right)^m+1\right\}\left\{\left(\frac{1}{11}\right)^m+1\right\}\left\{\left(\frac{1}{23}\right)^m+1\right\}}=\frac{8\times 11\times 23}{1}=2024$$

(6)

$$\frac{1}{a_k+\sqrt{2024}}=\frac{a_k-\sqrt{2024}}{(a_k+\sqrt{2024})(a_k-\sqrt{2024})}=\frac{a_k-\sqrt{2024}}{(a_k)^2-2024}$$

ここで、a_k と対になる$a_k{}'$ とセットで考えます。

つまり、$a_k\times a_k{}'=2024$ です。

$$\frac{1}{a_k+\sqrt{2024}}+\frac{1}{a_k{}'+\sqrt{2024}}=\frac{a_k-\sqrt{2024}}{(a_k)^2-2024}+\frac{a_k{}'-\sqrt{2024}}{(a_k{}')^2-2024}=\frac{a_k-\sqrt{a_ka_k{}'}}{(a_k)^2-a_ka_k{}'}+\frac{a_k{}'-\sqrt{a_ka_k{}'}}{(a_k{}')^2-a_k\times a_k{}'}$$

$$=\frac{a_k-\sqrt{a_ka_k{}'}}{a_k(a_k-a_k{}')}+\frac{a_k{}'-\sqrt{a_ka_k{}'}}{a_k{}'(a_k{}'-a_k)}=\frac{a_k}{a_k(a_k-a_k{}')}+\frac{a_k{}'}{a_k{}'(a_k{}'-a_k)}+\frac{-\sqrt{a_ka_k{}'}}{a_k(a_k-a_k{}')}+\frac{-\sqrt{a_ka_k{}'}}{a_k{}'(a_k{}'-a_k)}$$

$$=\frac{1}{(a_k-a_k{}')}-\frac{1}{(a_k-a_k{}')}+\frac{-\sqrt{a_k{}'}}{\sqrt{a_k}(a_k-a_k{}')}+\frac{\sqrt{a_k}}{\sqrt{a_k{}'}(a_k-a_k{}')}=0+\frac{1}{(a_k-a_k{}')}\times\left(\frac{\sqrt{a_k}}{\sqrt{a_k{}'}}-\frac{\sqrt{a_k{}'}}{\sqrt{a_k}}\right)$$

$$=\frac{1}{(a_k-a_k{}')}\times\frac{a_k-a_k{}'}{\sqrt{a_k\times a_k{}'}}=\frac{1}{\sqrt{2024}}$$

$a_k\times a_k{}'=2024$ のセットが 8 個あるので、答えは、

$$\frac{8}{\sqrt{2024}}=\sqrt{\frac{8}{253}}$$

問題 2

$s(n)$ は、n を 1 の位からみて最初に現れる 0 でない数字を表すとします。

例えば、$s(2\times 3)=s(6)=6,\ s(12\times 13)=s(156)=6$ です。

基本的に、積の一の位の値になり、十の位以上は値に影響しません。

しかし、積の一の位が 0 となるものは、十の位も関係してきます。

$s(2\times 5)=s(10)=1,\ s(12\times 15)=s(180)=8,\ s(22\times 25)=s(550)=5$

では、調べていきます。

$$s(36!)=s\begin{pmatrix}1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times10\\ \times11\times12\times13\times14\times15\times16\times17\times18\times19\times20\\ \times21\times22\times23\times24\times25\times26\times27\times28\times29\times30\\ \times31\times32\times33\times34\times35\times36\end{pmatrix}$$

$$=s\begin{pmatrix}\underline{2\times3}\times(4\times5)\times\underline{6\times7}\times\underline{8\times9}\\ \times\underline{12\times13}\times(14\times15)\times\underline{16\times17}\times\underline{18\times19}\times2\\ \times\underline{22\times23}\times(24\times25)\times\underline{26\times27}\times\underline{28\times29}\times3\\ \times\underline{32\times33}\times(34\times35)\times36\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}6\times20\times\underline{2\times2}\\ \times6\times210\times\underline{2\times2\times2}\\ \times6\times600\times\underline{2\times2\times3}\\ \times6\times1190\times\underline{6}\end{pmatrix}$$

$$=s\begin{pmatrix}2\times4\\ \times6\times8\\ \times6\times2\\ \times4\times6\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}8\\ \times8\\ \times2\\ \times4\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}4\\ \times2\\ \times4\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}8\\ \times4\end{pmatrix}=s(2)=2$$

答えは、2 です。

ついでに、上の結果から、$s(10!)=8,\ s(20!)=4,\ s(30!)=8$

問題3
mod 4で考えます。
2024の約数を、4で割った余りで分類してみます。
1のグループ：{1、253}
2のグループ：{2、22、46、506}
3のグループ：{11、23}
0のグループ：{4、8、44、88、92、184、1012、2024}
奇数の平方は、4で割った余りが1になります。
{1→1、3→9、5→25、7→49、9→81、11→121、13→169、15→225、
17→289、19→361、21→441、23→529、25→625、27→729、29→841、
31→961、33→1089、35→1225、37→1369、39→1521、41→1681、43→1849}
偶数の平方は、4で割った余りが0になります。
{2→4、4→16、6→36、8→64、10→100、12→144、14→196、16→256、
18→324、20→400、22→484、24→576、26→676、28→784、30→900、
32→1024、34→1156、36→1296、38→1444、40→1600、42→1764、44→1936}
(1) $a(2b^2+c^2)=2024 \quad \rightarrow \quad a(2b^2+c^2)\equiv 0$
● a が余り1のグループとします。
$1(2b^2+c^2)\equiv 0 \quad \rightarrow \quad 2b^2+c^2\equiv 0$ なので、bもcも偶数です。
・$a=1$ のとき、
$1(2b^2+c^2)=2024 \quad \rightarrow \quad 2024-c^2=2b^2$ なので、
$c^2=1936$ として、$2024-1936=2b^2 \quad \rightarrow \quad 88=2b^2 \quad \rightarrow \quad 44=b^2$ 不適
順に1764、1600、･･･と代入しても適当なものはありません。
・$a=253$ のとき、
$253(2b^2+c^2)=2024 \quad \rightarrow \quad 8-c^2=2b^2$ なので、
$c^2=4$ として、$8-4=2b^2 \quad \rightarrow \quad 4=2b^2 \quad \rightarrow \quad 2=b^2$ 不適
適当なものはありません。
● a が余り2のグループとします。
$2(2b^2+c^2)\equiv 0$ ですが、$c^2\equiv 2$ となることはないので、bもcも偶数です。
・$a=2$ のとき、
$2(2b^2+c^2)=2024 \quad \rightarrow \quad 1012-c^2=2b^2$ なので、
$c^2=900$ として、$1012-900=2b^2 \quad \rightarrow \quad 112=2b^2 \quad \rightarrow \quad 56=b^2$ 不適
順に784、676、･･･と代入しても適するものはありません。
・$a=22$ のとき、
$22(2b^2+c^2)=2024 \quad \rightarrow \quad 92-c^2=2b^2$ なので、
$c^2=64$ として、$92-64=2b^2 \quad \rightarrow \quad 28=2b^2 \quad \rightarrow \quad 14=b^2$ 不適
順に36、16、･･･と代入しても適するものはありません。
・$a=46$ のとき、
$46(2b^2+c^2)=2024 \quad \rightarrow \quad 44-c^2=2b^2$ なので、

$c^2=36$ として、$44-36=2b^2 \rightarrow 8=2b^2 \rightarrow 4=b^2 \rightarrow b=2$

よって、$a=46,\ b=2,\ c=6$

他、16、4 は適しません。

・$a=506$ のとき、

$506(2b^2+c^2)=2024 \rightarrow 4-c^2=2b^2$ なので、適するものはありません。

● a が余り 3 のグループとします。

$3(2b^2+c^2)\equiv 0$ なので b も c も偶数です。

・$a=11$ のとき、

$11(2b^2+c^2)=2024 \rightarrow 184-c^2=2b^2$ なので、

$c^2=144$ として、$184-144=2b^2 \rightarrow 40=2b^2 \rightarrow 20=b^2$ 不適

順に 100、64、・・・と代入しても適するものはありません。

・$a=23$ のとき、

$23(2b^2+c^2)=2024 \rightarrow 88-c^2=2b^2$ なので、

$c^2=64$ として、$88-64=2b^2 \rightarrow 24=2b^2 \rightarrow 12=b^2$ 不適

同様に 36 は不適です。

$c^2=16$ として、$88-16=2b^2 \rightarrow 72=2b^2 \rightarrow 36=b^2 \rightarrow b=6$

よって、$a=23,\ b=6,\ c=4$

また、4 は不適です。

● a が余り 0 のグループとします。

$0(2b^2+c^2)\equiv 0$ b にも c にも制限はありません。

・$a=4$ のとき、

$4(2b^2+c^2)=2024 \rightarrow 506-c^2=2b^2$ なので、

c を偶数として、

$c^2=484$ として、$506-484=2b^2 \rightarrow 22=2b^2 \rightarrow 11=b^2$ 不適

順に 400、324、・・・と代入しても適するものはありません。

・$a=8$ のとき、

$8(2b^2+c^2)=2024 \rightarrow 253-c^2=2b^2$ なので、

c を奇数として、

$c^2=225$ として、$253-225=2b^2 \rightarrow 28=2b^2 \rightarrow 14=b^2$ 不適

順に 169、121、・・・と代入しても適するものはありません。

・$a=44$ のとき、

$44(2b^2+c^2)=2024 \rightarrow 46-c^2=2b^2$ なので、

c を偶数として、

$c^2=36$ として、$46-36=2b^2 \rightarrow 10=2b^2 \rightarrow 5=b^2$ 不適

順に 16、4 と代入しても適するものはありません。

・$a=88$ のとき、

$88(2b^2+c^2)=2024 \rightarrow 23-c^2=2b^2$ なので、

cを奇数として、

$c^2=9$ として、$23-9=2b^2 \rightarrow 14=2b^2 \rightarrow 7=b^2$ 不適

順に1を代入しても不適です。

・$a=92$ のとき、

$92(2b^2+c^2)=2024 \rightarrow 22-c^2=2b^2$ なので、

cを偶数として、

$c^2=16$ として、$22-16=2b^2 \rightarrow 6=2b^2 \rightarrow 3=b^2$ 不適

$c^2=4$ として、$22-4=2b^2 \rightarrow 18=2b^2 \rightarrow 9=b^2 \rightarrow b=3$

よって、$a=92,\ b=3,\ c=2$

・$a=184$ のとき、

$184(2b^2+c^2)=2024 \rightarrow 11-c^2=2b^2$ なので、

cを奇数として、

$c^2=9$ として、$11-9=2b^2 \rightarrow 2=2b^2 \rightarrow 1=b^2 \rightarrow b=1$

よって、$a=184,\ b=1,\ c=3$

順に1を代入しても不適です。

・$a=1012$ のとき、

$1012(2b^2+c^2)=2024 \rightarrow 2-c^2=2b^2$ なので、不適です。

・$a=2024$ のときは不適です。

以上から、

$(a,b,c)=(46,2,6),(23,6,4),(92,3,2),(184,1,3)$

(2) $a(a^2+b^2+c^2)=2024$

a は2024の約数です。

● a が余り1のグループとします。

$1(1+b^2+c^2)\equiv 0 \rightarrow b^2+c^2\equiv 3$ なので、適するものはありません。

● a が余り2のグループとします。

$2(2^2+b^2+c^2)\equiv 0 \rightarrow 2(b^2+c^2)\equiv 0$ なので、bもcも偶数です。

・$a=2$ のとき、

$2(2^2+b^2+c^2)=2024 \rightarrow b^2+c^2=1008 \rightarrow 1008-c^2=b^2$

$c^2=900$ として、$1008-900=b^2 \rightarrow 108=b^2$ 不適

順に784、676、・・・と代入しても適当なものはありません。

・$a=22$ のとき、

$22(22^2+b^2+c^2)=2024 \rightarrow 484+b^2+c^2=92$ なので、不適です。

・$a=46,\ 506$ のときも不適です。

● a が余り3のグループとします。

$3(3^2+b^2+c^2)\equiv 0 \rightarrow 3(1+b^2+c^2)\equiv 0$ なので、不適です。

● a が余り0のグループとします。

$0(0^2+b^2+c^2)\equiv 0$ なので、bとcに制限がないようにみえます。

・$a=4$ のとき、

$4(4^2+b^2+c^2)=2024 \quad\rightarrow\quad 490-c^2=b^2$ なので、bもcも奇数です。

$c^2=441$ として、$490-441=b^2 \quad\rightarrow\quad 49=b^2 \quad\rightarrow\quad b=7$

よって、$a=4,\ b=7,\ c=21$

このあと順に361、289、225、169、121、81としても適するものがありません。

$c^2=49$ とすると、$490-49=b^2 \quad\rightarrow\quad 441=b^2 \quad\rightarrow\quad b=21$

よって、$a=4,\ b=21,\ c=7$

さらに、25、9、1としても適するものがありません。

・$a=8$ のとき、

$8(8^2+b^2+c^2)=2024 \quad\rightarrow\quad 189-c^2=b^2$ なので、bとcは偶奇が異なります。

偶数で調べます。

$c^2=144$ として、$189-144=b^2 \quad\rightarrow\quad 45=b^2$ 不適

順に、100、64、・・・としても適するものがありません。

・$a=44$ のとき、

$44(44^2+b^2+c^2)=2024 \quad\rightarrow\quad 1936+b^2+c^2=46$ 不適です。

・$a=88,\ 92,\ 184,\ 1012,\ 2024$ のときはもちろん適するものはありません。

以上から、

$(a,b,c)=(4,7,21),(4,21,7)$

追加問題

問題1

$$k^3+(k+1)^3+(k+2)^3+\cdots+(k+l-1)^3$$
$$=1^3+\cdots+(k-1)^3+k^3+\cdots+(k+l-1)^3-\{1^3+\cdots+(k-1)^3\}$$
$$=\left\{\frac{(k+l-1)(k+l)}{2}\right\}^2-\left\{\frac{(k-1)k}{2}\right\}^2=$$
$$=\frac{1}{4}\{2k^2+2(l-1)k+(l-1)l\}\{2lk+(l-1)l\}=\frac{l}{4}(2k+l-1)\cdot\{2k^2+2(l-1)k+(l-1)l\}$$

$2024=8\times11\times23$ なので、l を4倍数と考えます。

・$l=4$、$2k+l-1=11$ とすると、$k=4$ となります。

　$2k^2+2(l-1)k+(l-1)l=68$ より、$1\times11\times68=748$ なのでだめです。

　$l=4$、$2k+l-1=23$ とすると、$k=10$ となります。

　$2k^2+2(l-1)k+(l-1)l=272$ より、$1\times23\times272=6256$ なのでだめです。

・$l=8$、$2k+l-1=11$ とすると、$k=2$ となります。

　$2k^2+2(l-1)k+(l-1)l=92$ より、$2\times11\times92=2024$ で成立します。

　$l=8$、$2k+l-1=23$ とすると、$k=8$ となります。

　$2k^2+2(l-1)k+(l-1)l=296$ より、$2\times23\times296=13616$ なのでだめです。

以上から、$k=2,\ l=8$ です。

問題2

●2024を2個の有理数に分けたとき、二つの有理数の分母を同じとします。

$$2024=8\times11\times23=\frac{q^2}{p^2}+\frac{r^2+2rp}{p^2}$$

右の項に1を加えると、

$$\frac{r^2+2rp}{p^2}+1=\frac{r^2+2rp+p^2}{p^2}=\frac{(r+p)^2}{p^2}$$

なので、平方数になります。

分母のpは2や4とすると、分子が偶数のとき約分できるので奇数とします。

3のときも約分できる場合が多いので、p＝5として考えてみます。

●分母を払って、$q^2+r^2+2rp=8\times11\times23p^2\ \rightarrow\ q^2+r^2+10r=8\times11\times23\times5^2$

・まず、mod 8でqとrについて考えます。

$8\times11\times23p^2\equiv q^2+\underline{r^2+10r}\equiv0\ \cdots\ (*)$

なので、$q\equiv0$ とします。

すると、$q=4s$ なら、rは偶数ならよいことが分かります。

$q^2+r^2+10r=(4s)^2+(4t+2)^2+10(4t+2)=8\times2s^2+4(2t+1)^2+4\times5(2t+1)$
$=8\times2s^2+4(2t+1)\{(2t+1)+5\}=8\times2s^2+4(2t+1)(2t+6)=8\times2s^2+8(2t+1)(t+3)$
$=8\{2s^2+(2t+1)(t+3)\}\equiv0$

●

・rを偶数として、mod 11とmod 23で考えます。

式（＊）の下線部を計算して、対応するq^2のグループを探します。

表A　mod11

グループ	r	平方数	mod 11	r^2+10*r	mod 11	左と対	対応グループ
1	2	4	4	24	2	9	4,7
2	4	16	5	56	1	10	x
3	6	36	3	96	8	3	3,8
4	8	64	9	144	1	10	x
5	10	100	1	200	2	9	4,7
6	12	144	1	264	0	0	11
7	14	196	9	336	6	5	2,9
8	16	256	3	416	9	2	x
9	18	324	5	504	9	2	x
10	20	400	4	600	6	5	2,9
11	22	484	0	704	0	0	11

この結果から、mod11では、グループ2，4，8，9に適するrはありません。

表B　mod23

グループ	r	平方数	mod 23	r^2+10*r	mod 23	左と対	対応グループ
1	2	4	4	24	1	22	x
2	4	16	16	56	10	13	3,20
3	6	36	13	96	4	19	x
4	8	64	18	144	6	17	x
5	10	100	8	200	16	7	x
6	12	144	6	264	11	12	7,16
7	14	196	12	336	14	9	10,13
8	16	256	3	416	2	21	x
9	18	324	2	504	21	2	9,14
10	20	400	9	600	2	21	x
11	22	484	1	704	14	9	10,13
12	24	576	1	816	11	12	7,16
13	26	676	9	936	16	7	x
14	28	784	2	1064	6	17	x
15	30	900	3	1200	4	19	x
16	32	1024	12	1344	10	13	3,20
17	34	1156	6	1496	1	22	x
18	36	1296	8	1656	0	0	23
19	38	1444	18	1824	7	16	2,21
20	40	1600	13	2000	22	1	11,12
21	42	1764	16	2184	22	1	11,12
22	44	1936	4	2376	7	16	2,21
23	46	2116	0	2576	0	0	23

この結果から、mod23 では、グループ 1、10, 13, 14, 15, 17 に適する r はありません。

下の 11×23＝23×11＝253 個の偶数の中に、11 と 23 の mod のすべてのパターンが入っています。

灰色のセルは r として適さないものです。

赤字は 4 の倍数です。

表 C mod11

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
1	2	24	46	68	90	112	134	156	178	200	222	244	266	288	310	332	354	376	398	420	442	464	486
2	4	26	48	70	92	114	136	158	180	202	224	246	268	290	312	334	356	378	400	422	444	466	488
3	6	28	50	72	94	116	138	160	182	204	226	248	270	292	314	336	358	380	402	424	446	468	490
4	8	30	52	74	96	118	140	162	184	206	228	250	272	294	316	338	360	382	404	426	448	470	492
5	10	32	54	76	98	120	142	164	186	208	230	252	274	296	318	340	362	384	406	428	450	472	494
6	12	34	56	78	100	122	144	166	188	210	232	254	276	298	320	342	364	386	408	430	452	474	496
7	14	36	58	80	102	124	146	168	190	212	234	256	278	300	322	344	366	388	410	432	454	476	498
8	16	38	60	82	104	126	148	170	192	214	236	258	280	302	324	346	368	390	412	434	456	478	500
9	18	40	62	84	106	128	150	172	194	216	238	260	282	304	326	348	370	392	414	436	458	480	502
10	20	42	64	86	108	130	152	174	196	218	240	262	284	306	328	350	372	394	416	438	460	482	504
11	22	44	66	88	110	132	154	176	198	220	242	264	286	308	330	352	374	396	418	440	462	484	506

表 D mod23

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	2	48	94	140	186	232	278	324	370	416	462
2	4	50	96	142	188	234	280	326	372	418	464
3	6	52	98	144	190	236	282	328	374	420	466
4	8	54	100	146	192	238	284	330	376	422	468
5	10	56	102	148	194	240	286	332	378	424	470
6	12	58	104	150	196	242	288	334	380	426	472
7	14	60	106	152	198	244	290	336	382	428	474
8	16	62	108	154	200	246	292	338	384	430	476
9	18	64	110	156	202	248	294	340	386	432	478
10	20	66	112	158	204	250	296	342	388	434	480
11	22	68	114	160	206	252	298	344	390	436	482
12	24	70	116	162	208	254	300	346	392	438	484
13	26	72	118	164	210	256	302	348	394	440	486
14	28	74	120	166	212	258	304	350	396	442	488
15	30	76	122	168	214	260	306	352	398	444	490
16	32	78	124	170	216	262	308	354	400	446	492
17	34	80	126	172	218	264	310	356	402	448	494
18	36	82	128	174	220	266	312	358	404	450	496
19	38	84	130	176	222	268	314	360	406	452	498
20	40	86	132	178	224	270	316	362	408	454	500
21	42	88	134	180	226	272	318	364	410	456	502
22	44	90	136	182	228	274	320	366	412	458	504
23	46	92	138	184	230	276	322	368	414	460	506

表C、Dのいずれも灰色でない数は、rの候補です。

{12,14,22,24,32,36,42,44,46,50,58,64,68,78,86,88,90,
110,116,124,130,132,134,138,142,152,156,160,174,176,178,182,188,196,198,
208,220,222,226,230,234,242,244,248,252,254,262,266,270,274,276,288,298,
300,308,314,318,320,322,336,340,344,354,358,362,364,366,372,380,386,
406,408,410,418,428,432,438,446,450,452,454,460,464,472,474,482,482,484,496,498,
504,506}

●以下地道な作業です。

・r＝12とすると、表Aからグループ(11)、表Bからグループ[7]、[16]がqの候補です。

(11)

22	44	66	88	110	132	154	176	198	220	242	264	286	308	330	352	374	396	418	44

[7]

14	60	106	152	198	244	290	336	382	428	474

[16]

32	78	124	170	216	262	308	354	400	446	492

198が共通ですが、4の倍数ではありません。

・r＝14とすると,表Aからグループ(2),(9),表Bからグループ［10］,［13］がqの候補です。

(2)

4	26	48	70	92	114	136	158	180	202	224	246	268	290	312	334	356	378	400	42

(9)

18	40	62	84	106	128	150	172	194	216	238	260	282	304	326	348	370	392	414	43

[10]

20	66	112	158	204	250	296	342	388	434	480

[13]

26	72	118	164	210	256	302	348	394	440	486

26、158、348、480 が共通です。

26、158 は 4 の倍数ではありません。

348、480 は、通分した分子が 11、23 の倍数ですが適しません。

・ r ＝58 とすると、表 A からグループ(2)、(9)、表 B からグループ［7］，［16］が q の候補です。

(2)

4	26	48	70	92	114	136	158	180	202	224	246	268	290	312	334	356	378	400	42

(9)

18	40	62	84	106	128	150	172	194	216	238	260	282	304	326	348	370	392	414	43

[7]

14	60	106	152	198	244	290	336	382	428	474

[16]

32	78	124	170	216	262	308	354	400	446	492

290、400、106、216 が共通です。

290，106 は 4 の倍数ではありません。

400 は、通分した分子が 11、23 の倍数ですが適しません。

216 は、

$$\frac{216^2}{5^2}+\frac{58^2+2\times 58\times 5}{5^2}=\frac{46656}{25}+\frac{3944}{25}=\frac{50600}{25}=2024$$

より、適します。

一例として答えは、

$\frac{46656}{25}$ と $\frac{3944}{25}$

……

以下略

問題 3

先ず条件から、

$$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x^2+1}+\frac{4}{x^4+1}=\frac{2}{x^2-1}-\frac{2}{x^2+1}+\frac{4}{x^4+1}=\frac{4}{x^4-1}+\frac{4}{x^4+1}$$

$$=\frac{8x^4}{x^8-1}=8 \quad\rightarrow\quad x^4=x^8-1 \quad\rightarrow\quad x^4+1=x^8$$

これを用いて、

$$\frac{1}{x^4-x^2+1}+\frac{1}{x^4+x^2+1}=\frac{(x^4+x^2+1)+(x^4-x^2+1)}{(x^4-x^2+1)(x^4+x^2+1)}$$

$$=\frac{2(x^4+1)\times(x^2+1)(x^2-1)}{(x^4-x^2+1)(x^4+x^2+1)\times(x^2+1)(x^2-1)}$$

$$=\frac{2(x^4+1)(x^4-1)}{(x^6+1)(x^6-1)}=\frac{2(x^4+1)(x^4-1)}{x^{12}-1}=\frac{2(x^4+1)(x^4-1)}{(x^4-1)(x^8+x^4+1)}=\frac{2x^8}{x^8+x^8}=1$$

よって、

$$\left(\frac{1}{x^4-x^2+1}+\frac{1}{x^4+x^2+1}\right)^{2024}=1^{2024}=1$$

問題 4

「少なくとも 1 本当たる」の余事象は、「すべて外れる」です。

(1)

●2 本引いて全部外れる確率が 0.5 を超えないとして考えます。

$$\frac{2023-n}{2023}\times\frac{2022-n}{2022}<\frac{1}{2}\quad\rightarrow\quad n^2-4045n+2023\times1011<0$$

$$\frac{4045-\sqrt{4045^2-4\times2023\times1011}}{2}<n<\frac{4045+\sqrt{4045^2-4\times2023\times1011}}{2}$$

電卓で計算すると、

$$\frac{4045-\sqrt{4045^2-4\times2023\times1011}}{2}=592.37\cdots$$

よって、 n ＝593

●上の方法で他の問題は、計算が大変です。,

1 回目と 2 回目のくじの当たる確率がだいたい同じと考え、

$\frac{2023-n}{2023}\cong\frac{2022-n}{2022}$ とします。

0.5 の平方根が、0.7071･･･なので、$\frac{2023-n}{2023}=0.7071$ とすると、

$n=2023\times(1-0.7071)=592.5367$

$$\frac{2023-592}{2023}\times\frac{2022-592}{2022}=0.5002\cdots$$

$$\frac{2023-593}{2023}\times\frac{2022-593}{2022}=0.4995\cdots$$

より、 n ＝593

順番を変えます。

(3) $\sqrt{0.5}=0.7071\cdots\quad\rightarrow\quad\sqrt{0.7071}=0.8408\cdots$ なので、$\frac{2023-n}{2023}=0.8408$とすると、

$n=2023\times(1-0.8408)=322.0616$

$$\frac{2023-322}{2023}\times\frac{2022-322}{2022}\times\frac{2021-322}{2021}\times\frac{2020-322}{2020}=0.4995\cdots$$

$$\frac{2023-321}{2023}\times\frac{2022-321}{2022}\times\frac{2021-321}{2021}\times\frac{2020-321}{2020}=0.5002\cdots$$

より、 n ＝322

(2)開閉は手計算できますが、開立は忘れてしまったので、電卓を使います。

$\sqrt[3]{0.5}=0.7937\cdots$ なので、$\frac{2023-n}{2023}=0.7937$とすると、

$n=2023\times(1-0.7937)=417.3449$

$$\frac{2023-417}{2023}\times\frac{2022-417}{2022}\times\frac{2021-417}{2021}=0.5001\cdots$$

$$\frac{2023-418}{2023}\times\frac{2022-418}{2022}\times\frac{2021-418}{2021}=0.4991\cdots$$

より、 n ＝418