● 問題 434 解答＜三角定規＞

［問題１］

$$2024=2^3\cdot 11\cdot 23,\quad S(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k{}^x$$

(1) $S(0)$ は 2024 の約数の個数だから，$S(0)=(1+3)(1+1)(1+1)=\mathbf{16}$ …[答]

(2) $S(1)$ は 2024 の約数の総和だから，

$$S(1)=(1+2+4+8)(1+11)(1+23)=\mathbf{4320}\quad \cdots[\text{答}]$$

(3) $$S(-1)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)\left(1+\frac{1}{11}\right)\left(1+\frac{1}{23}\right)$$

$$=\frac{8+4+2+1}{8}\cdot\frac{11+1}{11}\cdot\frac{23+1}{23}=\frac{15}{8}\cdot\frac{12}{11}\cdot\frac{24}{23}=\frac{\mathbf{540}}{\mathbf{253}}\quad \cdots[\text{答}]$$

(4) $$S(2)=\sum_{k=1}^{n} a_k{}^2=(1^2+2^2+4^2+8^2)(1+11^2)(1+23^2)$$

$$=(1+4+16+64)(1+121)(1+529)=85\cdot 122\cdot 530$$

$$\frac{S(2)}{S(1)}=\frac{85\cdot 122\cdot 530}{15\cdot 12\cdot 24}=\frac{\mathbf{274{,}805}}{\mathbf{216}}\quad \cdots[\text{答}]$$

(5) $$S(m)=(1^m+2^m+4^m+8^m)(1+11^m)(1+23^m)$$

$$=(1^m+2^m+4^m(1+2^m))(1+11^m)(1+23^m)$$

$$=(1+2^m)(1+4^m)(1+11^m)(1+23^m)$$

$$\frac{S(m+1)}{S(m)}=\frac{(1+2^{m+1})(1+4^{m+1})(1+11^{m+1})(1+23^{m+1})}{(1+2^m)(1+4^m)(1+11^m)(1+23^m)}$$

$$=\frac{1+2\cdot 2^m}{1+2^m}\cdot\frac{1+4\cdot 4^m}{1+4^m}\cdot\frac{1+11\cdot 11^m}{1+11^m}\cdot\frac{1+23\cdot 23^m}{1+23^m}$$

$$=\frac{1/2^m+2}{1/2^m+1}\cdot\frac{1/4^m+4}{1/4^m+1}\cdot\frac{1/11^m+11}{1/11^m+1}\cdot\frac{1/23^m+23}{1/23^m+1}\underset{(m\to\infty)}{\to} 2\cdot 4\cdot 11\cdot 23=\mathbf{2024}\quad \cdots[\text{答}]$$

(6) $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k+\sqrt{2024}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k-\sqrt{2024}}{a_k{}^2-2024}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k-2024/a_k}-\sqrt{2024}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k(a_k-2024/a_k)}\quad \cdots(*)$$

(*) の第１の$\sum$

第１項＋第16項$=\dfrac{1}{1-2024}+\dfrac{1}{2024-1}=0$，　第２項＋第15項$=\dfrac{1}{2-1012}+\dfrac{1}{1012-2}=0$，…

等々，全ての項が相殺されて 0。

(*) の第２の$\sum$

第１項＋第16項$=\dfrac{1}{1(1-2024)}+\dfrac{1}{2024(2024-1)}=\dfrac{1}{2023}\left(\dfrac{1}{2024}-1\right)=-\dfrac{1}{2024}$

第２項＋第15項$=\dfrac{1}{2(2-1012)}+\dfrac{1}{1012(1012-2)}=\dfrac{1}{1010}\left(\dfrac{1}{1012}-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2024}$，…

等々となるから，求める(*)の総和は　$\dfrac{8\sqrt{2024}}{2024}=\dfrac{\mathbf{2\sqrt{506}}}{\mathbf{253}}$　…[答]

［問題２］

$36! = 36!! \times 35!! = 2^{18} \times 18! \times 35!! = 2^{18} \times 2^{9} \times 18!! \times 17!! \times 35!! = \cdots$

等の方法で丹念に調べて

$36! = 2^{34} \times 3^{17} \times 5^{8} \times 7^{5} \times 11^{3} \times 13^{2} \times 17^{2} \times 19 \times 23 \times 29 \times 31$

よって，求める「0を除く最下位の数」は

$$\frac{36!}{10^8} = 2^{26} \times 3^{17} \times 7^{5} \times 11^{3} \times 13^{2} \times 17^{2} \times 19 \times 23 \times 29 \times 31 = N$$

の計算を実行した際の「末位」の数，すなわち「10で割った余り」である。

$$N \equiv (2^5)^5 \times 2 \times 3^{17} \times 7^5 \times 3^2 \times 7^2 \times 9 \times 3 \times 9 \pmod{10}$$

$$\equiv 32^5 \times 2 \times 3^{24} \times 7^7 \pmod{10}$$

$$\equiv 2^6 \times 3^{17} \times 21^7 \pmod{10}$$

$$\equiv 4 \times (3^4)^4 \times 3 \pmod{10}$$

$$\equiv 4 \times 81^4 \times 3 \equiv 12 \equiv 2 \pmod{10}$$

以上より，求める数は　**2**　…［答］

※ 全ての素因数を求めなくても，途中で手を抜く方法もあると思います。

因みに 36!＝ 371,993,326,789,901,217,467,999,448,150,835,**2**00,000,000

［問題３］

(1) $a(2b^2 + c^2) = 2024$

a に 2024 の 16 個の約数全てを代入し虱潰しをした結果，与式の整数解は

$(a, b, c) =$ **(23, 6, 4)**, **(46, 2, 6)**, **(92, 3, 2)**, **(184, 1, 3)** …［答］

(2) $a(a^2 + b^2 + c^2) = 2024$

(1)同様虱潰しをした結果

$(a, b, c) =$ **(4, 7, 21)**, **(4, 21, 7)** …［答］

《追加問題》

［問題１］

$k+l-1=m$ と書くと

$k^3+(k+1)^3+(k+2)^3+\cdots+m^3=2024$ …①

$12^3<2024<13^3$ だから $m\leqq 12$。

(ⅰ) $m=12$ のとき，$11^3+12^3>2024$ だから①を満たす k はない。

(ⅱ) $m=11$ のとき，$10^3+11^3>2024$ だから①を満たす k はない。

(ⅲ) $m=10$ のとき，$8^3+9^3+10^3>2024$ だから①を満たす k はない。

k が整数のとき，①の左辺は $\left(\dfrac{m(m+1)}{2}\right)^2-\left(\dfrac{(k-1)k}{2}\right)^2$ と書けるので

(ⅳ) $m=9$ のとき $\left(\dfrac{9\cdot 10}{2}\right)^2-\left(\dfrac{k(k-1)}{2}\right)^2=2024$ $\therefore$ $\dfrac{k^2(k-1)^2}{4}=45^2-2024=1$

$\therefore$ $k(k-1)=2,\ k^2-k-2=(k-2)(k+1)=0,$ $\therefore$ $k=2,\ -1$

$k=2$ のとき，$l=m+1-k=8$

$k=-1$ のとき，$l=10$

(ⅴ) $m\leqq 8$ のとき，$\left(\dfrac{8\cdot 9}{2}\right)^2=36^2=1296$ だから (①の左辺)$\leqq 1296$ で，題意を満たさない。

以上より，題意を満たす $k,\ l$ は，$(k,\ l)=\mathbf{(2,\ 8),\ (-1,\ 10)}$ …[答]

［問題２］

題意より次のように書ける。

$2024=\left(\dfrac{q}{p}\right)^2+\left(\dfrac{s}{r}\right)^2-1$ (p,q,r,s : 整数，p と q，r と s は互いに素) …①

①を満たすものの一例として $p=r$ (p と s は互いに素) のものを求める。このとき①を整理して

$q^2+s^2=2025p^2=(45p)^2$ …②

②より，$s^2=(45p)^2-q^2=(45p+q)(45p-q)$ …②′

$s=s_1s_2$ (s_1, s_2 : 整数) とし②′より

$45p+q=s_1s_2^2$ …③，$45p-q=s_1$ …④ となるものを考察すると

③④より $90p=s_1(s_2^2+1)$ …⑤，$2q=s_1(s_2^2-1)$ …⑥

⑤⑥より $\dfrac{45p}{q}=\dfrac{s_2^2+1}{s_2^2-1}$ …⑦

⑦で $s_2=2$ とすると，$\dfrac{45p}{q}=\dfrac{5}{3}$ $\therefore$ $27p=q$ となり，これは p, q が互いに素に反する。

$s_2=3$ とすると，$\dfrac{45p}{q}=\dfrac{5}{4}$ $\therefore$ $36p=q$ となり，これも p, q が互いに素に反する。

$s_2=4$ とすると，$\dfrac{45p}{q}=\dfrac{17}{15}$。これは $p=17.\ q=45\cdot 15$ …⑧ とすると<素>が満たされる。

⑧を⑤⑥に戻して $s_1=90,\ s=90\cdot 4=45\cdot 8,$ $\left(\dfrac{s}{r}\right)^2-1=\dfrac{360^2-17^2}{17^2}=\dfrac{377\cdot 343}{17^2}=\dfrac{7^3\cdot 13\cdot 29}{17^2}$

以上より，求める分割の一例は $\left(\dfrac{\mathbf{3^3\cdot 5^2}}{\mathbf{17}}\right)^2$ と $\dfrac{\mathbf{7^3\cdot 13\cdot 29}}{\mathbf{17^2}}$ …[答] $\left(\dfrac{455{,}625}{289}+\dfrac{129{,}311}{289}=2{,}024\right)$

［問題３］

$$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x^2+1}+\frac{4}{x^4+1}=8 \quad \cdots ①$$

左辺を整理し， $\dfrac{8x^4}{x^8-1}=8, \quad \therefore\ x^8-1=x^4 \ \cdots ②$

$$\frac{1}{x^4-x^2+1}+\frac{1}{x^4+x^2+1}=\frac{2(x^4+1)}{(x^4-x^2+1)(x^4+x^2+1)}=\frac{2(x^4+1)}{x^8+x^4+1}=1 \ (\because\ ②)$$

$$\therefore\ \left(\frac{1}{x^4-x^2+1}+\frac{1}{x^4+x^2+1}\right)^{2024}=\mathbf{1} \quad \cdots [答]$$

［問題４］

(1) 題意より，2 本ともハズレの確率は $\dfrac{1}{2}$ 以下で， $\dfrac{2023-n}{2023}\cdot\dfrac{2022-n}{2022}\leqq\dfrac{1}{2} \ \cdots ①$

①の左辺を $\left(\dfrac{2023-n}{2023}\right)^2$ と近似すると， $1-\dfrac{n}{2023}\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}<0.708$

$\therefore\ n>2023(1-0.708)>590.7 \ \cdots ②$

②より $n=591$ として①に戻すと， $\dfrac{1432}{2023}\cdot\dfrac{1431}{2022}=0.5009\cdots$ となり 題意を満たさない。

$n=592$ として①に戻すと， $\dfrac{1431}{2023}\cdot\dfrac{1430}{2022}=0.5002\cdots$ となり 題意を満たさない。

$n=593$ として①に戻すと， $\dfrac{1430}{2023}\cdot\dfrac{1429}{2022}=0.499\cdots$ となり 題意を満たす。

以上より， 求める n の最小値は $n=\mathbf{593}$ …[答]

(2) (1)と同様に $\dfrac{2023-n}{2023}\cdot\dfrac{2022-n}{2022}\cdot\dfrac{2021-n}{2021}\leqq\dfrac{1}{2} \ \cdots ③$

③の左辺を $\left(\dfrac{2023-n}{2023}\right)^3$ と近似すると， $1-\dfrac{n}{2023}\leqq\dfrac{1}{2^{1/3}}<0.794$

$\therefore\ n>2023(1-0.794)>416.7 \ \cdots ④$

$n=417$ として③に戻すと， $\dfrac{1606}{2023}\cdot\dfrac{1605}{2022}\cdot\dfrac{1604}{2021}=0.5001\cdots$

$n=418$ として③に戻すと， $\dfrac{1605}{2023}\cdot\dfrac{1604}{2022}\cdot\dfrac{1603}{2021}=0.4991\cdots$

以上より， 求める n の最小値は $n=\mathbf{418}$ …[答]

(3) (1)と同様に $\dfrac{2023-n}{2023}\cdot\dfrac{2022-n}{2022}\cdot\dfrac{2021-n}{2021}\cdot\dfrac{2020-n}{2020}\leqq\dfrac{1}{2} \ \cdots ⑤$

⑤の左辺を $\left(\dfrac{2023-n}{2023}\right)^4$ と近似すると， $1-\dfrac{n}{2023}\leqq\dfrac{1}{2^{1/4}}<0.841$

$\therefore\ n>2023(1-0.841)>321.8 \ \cdots ⑥$

$n=322$ として⑤に戻すと， $\dfrac{1701}{2023}\cdot\dfrac{1700}{2022}\cdot\dfrac{1699}{2021}\cdot\dfrac{1698}{2020}=0.4995\cdots$

$n=321$ として⑤に戻すと， $\dfrac{1702}{2023}\cdot\dfrac{1701}{2022}\cdot\dfrac{1700}{2021}\cdot\dfrac{1699}{2020}=0.5007\cdots$

以上より， 求める n の最小値は $n=\mathbf{322}$ …[答]