第 435 回

問題 1（2013 年 千葉大学入試問題の類題）

m^4+5m^2 が $2m+1$ の整数倍となるような整数 m をすべて求めよ。

解答　$m^4+5m^2=m^2(m^2+5)$ が $2m+1$ の整数倍となるとき，$m^2(m^2+5)=(2m+1)k$（k は整数）と表される。

ここで，m^2 と $2m+1$ の最大公約数を g とすると，a，b を整数として，$m^2=ag$，$2m+1=bg$ と表される。

これらから m を消去して整理すると，$(4a-b^2g+2b)g=1$

$4a-b^2g+2b$ は整数であるから，$g=1$

よって，m^2 と $2m+1$ は互いに素であるから，

m^2+5 は $2m+1$ の整数倍となり，$m^2+5=(2m+1)l$（l は整数）と表される。

両辺を 4 倍して，$4m^2+20=4(2m+1)l$

左辺を変形して，$(2m+1)(2m-1)+21=4(2m+1)l$

整理すると，$(2m+1)(4l-2m+1)=21$

よって，$2m+1$ は 21 の約数であるから，$2m+1=\pm1,\ \pm3,\ \pm7,\ \pm21$

ゆえに，$m=0,\ -1,\ 1,\ -2,\ 3,\ -4,\ 10,\ -11$

各 m の値に対し，m，l の値の組を求めると，

$(m,\ l)=(0,\ 5),\ (-1,\ -6),\ (1,\ 2),\ (-2,\ -3),\ (3,\ 2),\ (-4,\ -3),\ (10,\ 5),\ (-11,\ -6)$

よって，l はすべて整数となり適する。

以上から，求める整数 m は，$m=-11,\ -4,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 3,\ 10$　答

問題 2（2023 年　千葉大学入試問題の類題）

i を虚数単位とする。

(1)　$z^3=-i$ の解を求めよ。

(2)　$z^{100}=-i$ の解で実部が $-\dfrac{1}{2}$ 以上で，虚部が負である解は何個あるか。

解答

(1)　$z^3=-i=\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2}$ より，

$$z=\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3}=-\sin\frac{2k\pi}{3}+i\cos\frac{2k\pi}{3}\quad (k=0,\ 1,\ 2)$$ であるから，

よって，$z=i,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$　答

(2)　$z^{100}=-i=\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2}$ より，$z=\cos\dfrac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{100}+i\sin\dfrac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{100}$　$(k=0,\ 1,\ \cdots,\ 99)$

仮定より，$\cos\dfrac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{100}\geqq-\dfrac{1}{2}$，$\sin\dfrac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{100}<0$ であるから，$\dfrac{4\pi}{3}\leqq\dfrac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{100}<2\pi$

$\therefore 65\dfrac{11}{12} \leqq k < 99\dfrac{1}{4}$

これを満たす整数 k の個数は， $99-66+1=34$ （個） 答

追加問題 1 $(1+x^{11}+x^{23})^{2024}$ を展開したときの項数を求めよ。

解答 便宜的に， $2024=n$ とおく。

与式は $23n$ 次式であるから，

$(1+x^{11}+x^{23})^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{23n}x^{23n}$ とおくと，項数は高々 $23n+1$ である。

係数 a_0， a_1，…， a_{23n} の中で 0 になる個数が s のとき，求める項数を t_n とおくと， $t_n = 23n+1-s$ である。

$(1+x^{11}+x^{23})^n$ を展開したときの一般項は， p， q， r を非負整数とし， $p+q+r=n$ とすると，

$\dfrac{n\,!}{p\,!\,q\,!\,r\,!}1^p(x^{11})^q(x^{23})^r = \dfrac{n\,!}{p\,!\,q\,!\,r\,!}x^{11q+23r}$ である。

(Ⅰ) $N=11q+23r$ とおくと， N の値は小さい方から， 0， 11， 22， 23，… となり， $N=1, 2, \cdots$ など，現れない指数が出てくる。

r を 11 で割ったときの商を q_1，余りを r_1 （ $r_1=0, 1, \cdots, 10$ ）とすると，$r=11q_1+r_1$

$q_1 \geqq 0$， $q \geqq 0$ であるから，

[1] $r_1=0$ のとき，

$N = 11q+23(11q_1+0) = 11(q+23q_1) \geqq 0$ 　11 の倍数の指数はすべて現れる。

[2] $1 \leqq r_1 \leqq 10$ のとき，

$N = 11q+23(11q_1+r_1) = 11(\,q+23q_1+\underset{\sim}{2r_1})+r_1 \geqq 11\cdot 2r_1+r_1 = 23r_1$

〰の部分が， $2r_1-1$， $2r_1-2$，…， 1， 0 の $2r_1$ 個は現れない。

従って，その総数は， $\displaystyle\sum_{r_1=1}^{10} 2r_1 = 2\times\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 11 = 110$ 　…①

(Ⅱ) N の値が $13n$ に近づくにしたがって，現れない指数が出てくる。

$r=n-p-q$ であるから，$N = 11q+23(n-p-q) = 23n-(23p+12q) = 23n-M$ （ただし， $M=23p+12q$ ）

p を 12 で割ったときの商を q_2，余りを r_2 （ $r_2=0, 1, \cdots, 11$ ）とすると，$p=12q_2+r_2$

M となる整数が現れなければ， $N=23n-M$ となる整数も現れない。

$q_2 \geqq 0$， $q \geqq 0$ であるから，

[1] $r_2=0$ のとき，

$M = 23(12q_2+0)+12q = 12(23q_2+q) \geqq 0$ 　$23n$ −(12 の倍数)の指数はすべて現れる。

[2] $1 \leqq r_2 \leqq 11$ のとき，

$M = 23(12q_2+r_2)+12q = 12(\,q+23q_2+\underset{\sim}{2r_2-1})+12-r_2 \geqq 12(2r_2-1)+12-r_2 = 23r_2$

〰の部分が， $2r_2-2$， $2r_2-3$，…， 1， 0 の $(2r_2-1)$ 個は現れない。

従って，その総数は， $\displaystyle\sum_{r_2=1}^{11}(2r_2-1) = 11^2 = 121$ 　…②

①，②より， $s=110+121=231$ 　…③

ただし，③の個数になる条件は，(Ⅰ)[2] と(Ⅱ)[2] により， $23\cdot 10 \leqq 23n-23\cdot 11$ 　$\therefore n \geqq 21$ のときである。

$n=2024$ は条件を満たす。

よって，$t_n=23n+1-231=23(n-10)$ より，$t_{2024}=23(2024-10)=46322$（項）　答

補足1　$t_n=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(n+1)(n+2) & (n\leqq 20 \text{ のとき})\\ 23(n-10) & (n\geqq 21 \text{ のとき})\end{cases}$

補足2　m，n は自然数で，$n\geqq 2m-1$ を満たすとき，$(1+x^m+x^{2m+1})^n$ を展開したときの項数は，

$(2m+1)(n-m+1)$（項）

追加問題2

自然数 a を n 個つなげた数を $a_{(n)}$ で表す。$12_{(3)}=121212$

$\sqrt{1_{(2024)}}$ の小数第1013位を求めよ。

解答　$\sqrt{1_{(2024)}}=\sqrt{\dfrac{9_{(2024)}}{9}}=\sqrt{\dfrac{10^{2024}-1}{9}}=\dfrac{10^{1012}}{3}(1-10^{-2024})^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt{1_{(2024)}}$ の小数第1013位は，$10^{1013}\sqrt{1_{(2024)}}$ の一の位の数である。

マクローリン展開　$(1+x)^m=1+mx+\dfrac{m(m-1)}{2!}x^2+\dfrac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\cdots$ において，

$x\to -x$，$m=\dfrac{1}{2}$ とすると，

$$\sqrt{1-x}=(1-x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}(-x)+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}(-x)^2+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}(-x)^3+\cdots$$

$$=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\cdots$$ であるから，

$$10^{1013}\sqrt{1_{(2024)}}=10^{1013}\cdot\frac{10^{1012}}{3}(1-10^{-2024})^{\frac{1}{2}}=\frac{10^{2025}}{3}\left(1-\frac{1}{2}\cdot 10^{-2024}-\frac{1}{2\cdot 4}\cdot 10^{-4048}-\cdots\right)$$

$$=\frac{10^{2025}}{3}-\frac{10}{2\cdot 3}-\frac{10^{-2023}}{3\cdot 2\cdot 4}-\cdots$$

一の位を求めるから，第3項以降は無視してかまわない。

$\dfrac{1}{3}\cdot 10^{2025}-\dfrac{5}{3}=333\cdots 33(2025\text{桁})+\dfrac{1}{3}-\dfrac{5}{3}=333\cdots 31(2025\text{桁})+\dfrac{2}{3}$

よって，一の位は1であるから，求める $\sqrt{1_{(2024)}}$ の小数第1013位は1　答

補足　ちなみに小数第1012位は3，小数第1014位は6である。

追加問題3

$\sqrt{2024^2-2024+\sqrt{2024^2-2024+\sqrt{2024^2-2024+\sqrt{\cdots}}}}$ を簡単にせよ。

解答　与式$=x$ とおくと，$x=\sqrt{2024^2-2024+x}$

両辺を2乗すると，$x^2=2024\cdot 2023+x$

因数分解すると，$(x-2024)(x+2023)=0$

$x>0$ より，$x=2024$　答

追加問題 4

お年玉付き年賀はがきの 3 等は 100 枚につき 3 枚当せんとなり，お年玉切手シートがもらえる。

3 等が当たる確率を $\frac{1}{2}$ 以上にするためには何枚必要か。

ただし， $\log_{10} 2 = 0.3010$ ， $\log_{10} 9.7 = 0.9868$ とする。

解答　n 枚必要とする。n 枚すべて外れる確率は $\left(\frac{97}{100}\right)^n$ であるから， $\left(\frac{97}{100}\right)^n < \frac{1}{2}$ となる最小の n を求める。

両辺の常用対数をとると， $n\log_{10}\frac{97}{100} < \log_{10}\frac{1}{2}$

$$n > \frac{\log_{10} 2}{\log_{10}\frac{100}{97}} = \frac{\log_{10} 2}{1 - \log_{10} 9.7} = \frac{0.3010}{1 - 0.9868} = \frac{0.3010}{0.0132} = 22.8\cdots$$

よって， 23 枚　答

（2024/1/7　ジョーカー）